۱۳۹۷،۱۱،۶
جلسه اول

DATE / / SUBJECT:

استاتیک (بیر جانسون) ویرایش دهم یا هشتم ا ـ ترجمه ابراهیم واحدیان

امتحان میان ترم ـ پایان فصل سوم

سرفصل ها:

۱ـ مبانی استاتیک: مکانیک ـ مفاهیم اساسی در علم استاتیک ـ نمایش برداری دو بعدی ـ اصول مکانیک نیوتن ـ سیستم یکاها

۲ـ نیروها: طبقه بندی نیروها ـ اصول عملیات برداری ـ تعادل ذره و نمودار آزاد جسم ـ گشتاور ـ سیستم های نیروی

۳ـ تعادل اجسام: حالات خاص تعادل ـ تکیه گاه های سازه های دو بعدی ـ تعادل اجسام دو بعدی ـ

تعادل اجسام دو نیرویی ـ تعادل اجسام سه بعدی

۴ـ خواص اجسام هندسی: مرکز ثقل ـ مرکز حجم ـ مرکز سطح ـ لنگر اول سطح (ممان استاتیک)

لنگر دوم سطح (ممان اینرسی) ـ نیروهای گسترده

۵ـ تحلیل سازه ها: خرپاها ـ تیرها و نمودار نیروهای داخلی

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

استاتیک یک شاخه ای از علم مکانیک است. مکانیک را میتوان علمی دانست که به بررسی سکون یا حرکت اجسام تحت اثر نیروهای موثر می پردازد. مکانیک را میتوان در سه شاخه ی زیر طبقه بندی نمود:

۱- مکانیک اجسام صلب ۲- مکانیک اجسام تغییر شکل پذیر ۳- مکانیک سیالات (شاره ها)

- مکانیک اجسام صلب
  - مکانیک اجسام صلب (ایستا) ← استاتیک
  - " " " (پویا) ← دینامیک

جسم صلب: جسمی است تحت اثر نیروهای موثر هیچ تغییر شکلی بین ذرات آن ایجاد نشود

مفاهیم اساسی در علم استاتیک را میتوان در ۴ دسته ی زیر طبقه بندی نمود که عبارتند از:

۱- فضا ۲- زمان ۳- جرم ۴- نیرو

تعریف فضا: موقعیت اجسام در فضا نسبت به یکدیگر سنجیده میشود. مختصات نقاط در فضا با واحد هم نام طول (L) بیان میشود.

۲- مفهوم زمان: تقدم و تأخر رویداد وقایع با زمان سنجیده میشود و واحد آن T میباشد.

۳- مفهوم جرم: جرم شاخه ای از اینرسی اجسام است. (اینرسی: مقاومت اجسام در برابر تغییر سرعت) ← واحد M

۴- مفهوم نیرو: عمل یک جسم یا ذره بر جسم دیگر است که با نقطه اثر و مقدار مشخص و با بردار نمایش داده میشود. ← واحد (F)

DATE / / SUBJECT:

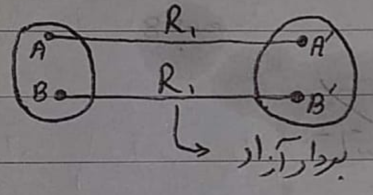
فصل ۱ بخش سوم (کمیت های عددی و برداری)

- کمیت های عددی یا اسکالر کمیت هایی هستند که تنها با مقدار مشخص میشوند مانند جرم ، زمان ، ...

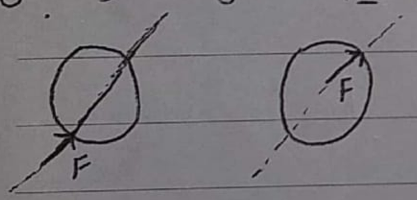
- کمیت های برداری ، کمیت هایی هستند که علاوه بر مقدار جهت نیز دارند مانند سرعت ، شتاب ، نیرو ، تغییر مکان و ...

تعریف انواع بردارها :

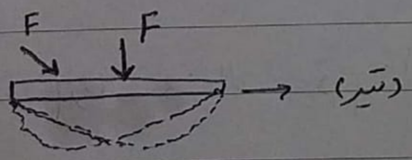
۱- بردار آزاد : بردار آزاد برداری است که مربوط به خط یا امتداد منحصر به فردی در فضا نباشد.



۲- بردار لغزان : برداری است که مربوط به خط یا امتداد منحصر به فردی در فضا میباشد ولی نقطه اثر ثابتی ندارد. (بررسی اجسام صلب از نگاه خارجی)



۳- بردار ثابت : برداری است که علاوه بر امتداد منحصر به فردی دارای نقطه اثر مشخصی می باشد.



(اثر نیروها بر اجسام تغییر شکل پذیر)

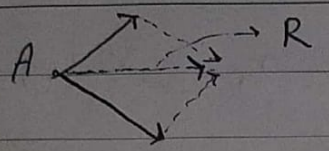
فصل ۱ بخش چهارم (اصول مکانیک نیوتنی)

اصول مکانیک نیوتنی بر پایه ی ۶ اصل استوار میباشد که عبارتند از : اصل اول (قانون متوازی الاضلاع)

دو نیروی مؤثر بر یک ذره را میتوان با تک نیروی برایند R جایگزین نمود بطوریکه این برایند قطر متوازی الاضلاع

Sahand

Scanned by CamScanner



است که دونیروی مزبور دو ضلع مجاورش هستند.

۲- اصل دوم (اصل انتقال پذیری): اگر دو نیرو با مقدار و جهت یکسان یک امتداد را داشته باشند این نیرو روی وضعیت تعادل یا حرکت یک جسم، یک وضعیت یکسانی دارند ⇐ (همان مشابه تعریف بردار لغزان)

۳- اصل سوم (قانون اول نیوتن): اگر نیروهای برایند وارد بر ذره‌ای صفر باشد، آن ذره یا در حال سکون یا دارای حرکت مستقیم الخط یکنواخت می‌باشد.

۴- اصل چهارم (قانون دوم نیوتن): اگر برایند نیروهای وارد بر ذره‌ای صفر نباشد، ذره شتابی متناسب با مقدار برایند و در امتداد آن خواهند داشت.

۵- اصل پنجم (قانون سوم نیوتن): نیروهای کنش و واکنش یا عمل و عکس العمل بین دو ذره یا دو جسم که با هم تماس دارند، دارای مقدار برابر، خط اثر یکسان ولی با جهت‌های مختلف ایجاد میشود.

اصل ششم (قانون جاذبه یا گرانش): طبق این قانون جرم‌های M (جرم کره زمین) و m (جرم جسم) همدیگر را با نیروی F جذب میکنند. این نیرو از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

G: نیروی ثابت گرانش

r^2: فاصله مراکز جرم‌ها

g شتاب ثقل $= \frac{GM}{r^2}$

m جرم جسم

$$\Rightarrow F = W = mg \rightarrow F = G\frac{Mm}{r^2}$$

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

فصل ۱: بخش پنجم (سیستم های یکاها)

به طور کلی سیستم های اندازه‌گیری مورد استفاده در مهندسی را میتوان در سه دسته‌ی زیر عنوان کرد:

۱- سیستم SI ۲- سیستم MKS ۳- سیستم US

سیستم SI ←

اصلی:
- زمان (T) ← ثانیه (s)
- طول (L) ← متر (m)
- جرم (M) ← کیلوگرم (kg)

فرعی (واحد):
- نیرو (F) ← نیوتن (N)

سیستم MKS ←
- زمان (T) ← ثانیه
- طول (L) ← متر
- جرم (M) ← کیلوگرم
- نیرو (F) ← کیلوگرم (kg)

سیستم US ←
- زمان (T) ← ثانیه (s)
- طول (L) ← فوت (ft)
- نیرو (F) ← پوند (lb)
- جرم (M) ← اسلاگ (slug)

$$1\ slug = 1\,\frac{lb_f \cdot s^2}{ft} \longleftrightarrow 1\ lb_f = 1\,\frac{slug \cdot ft}{s^2}$$

فصل دوم (نیروها)

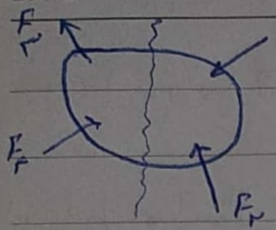
نیرو: عمل یک جسم بر جسم دیگر است که با نقطه اثر مشخص و بردار نشان داده میشود.

بخش ۱: تقسیم بندی نیروها: نیرو از جنبه های مختلف قابل تقسیم بندی است. اولین دیدگاه برای تقسیم بندی نیروها از نظر شان اثر است. (از نظر شان اثر:
- اثر نیروهای داخلی
- اثر نیروهای خارجی

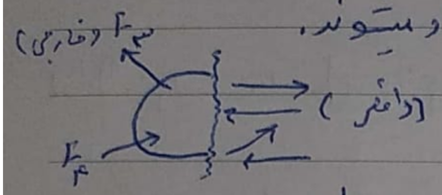
Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:



نیروهای خارجی: نیروهایی اندکه بر بیرون اجسام اثر میکنند.



نیروهای داخلی: نیروهایی اندکه در درون جسم و در اثر نیروهای خارجی ایجاد میشوند.

تقسیم بندی نیروها از نظر شکل:
- متمرکز (نیرویی که محل اثر آن یک نقطه است) واحد ← N و Kg
- گسترده:
  - خطی
  - سطحی
  - حجمی

نیروی گسترده خطی: نیرویی است که بر واحد طول جسم توزیع میشود. واحد ← $\frac{\text{نیرو}}{\text{طول}} = \frac{N}{mm}$ ، $\frac{K}{cm}$ ، ...

نیروی گسترده سطحی: نیرویی است که بر واحد سطح توزیع میشود. واحد ← $\frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} = \frac{N}{mm^2}$ ، $\frac{K}{cm^2}$ ، ...

نیروی گسترده حجمی: نیرویی است که بر واحد حجم توزیع میشود. واحد ← $\frac{\text{نیرو}}{\text{حجم}} = \frac{N}{mm^3}$ ، $\frac{K}{cm^3}$ ، ...

تقسیم بندی نیرو از نظر امتداد اثر:
- ثقلی: نیروهای که عمود بر سطح زمین اند ←
  - ثقلی مرده: نیرویی که امکان جابه جایی ندارد (وزن کف سازه و ...)
  - ثقلی زنده: امکان جابه جایی دارد مثل آدم، نیمکت و ...
- جانبی: نیروهایی که در راستای افق به سازه اثر میکنند (باد و زلزله و ...)

- استاتیکی: نیرویی که به آرامی به جسم اثر میکند و تابعی از مکان (زمان) نمیباشد.
  " " " زمان
- دینامیکی: نیروهایی که خیلی سریع به جسم اثر میکنند و تابعی از مکان (زمان) میباشند.

Sahand

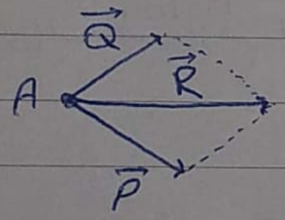
Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

فصل ۲ بخش ۲ (اصول عملیات برداری)

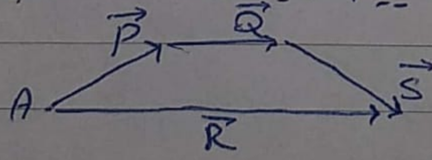
این اصول را میتوان به ۱۲ دسته یا اکسیوم زیر تقسیم بندی کرد. (با توجه به اینکه نیرو یک کمیت برداری است لذا لازم است اصول حاکم بر آن را بدانیم:

- حالت اول - (برآیند دو نیرو): دو نیروی مؤثر بر ذره‌ی A را میتوان با یک نیروی برآیند R که اثر دو نیروی مذبور را دارد جایگزین نمود.



$$\vec{R} = \vec{Q} + \vec{P}$$

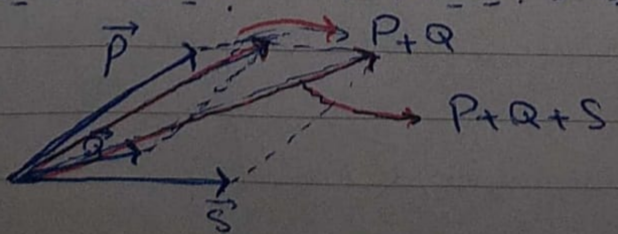
- حالت دوم - (برآیند چند نیرو): برای تعیین برآیند چند نیرو میبایست ابتدا نیروهای داده شده را پشت سر هم رسم کرده و سپس ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل نماییم. (به این کار اصطلاحاً قاعده‌ی چندضلعی گویند)



$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

خاصیت‌هایی در جمع بردارها:
- جابجایی: $(\vec{P}+\vec{Q})+\vec{S} = \vec{S}+(\vec{P}+\vec{Q})$
- شرکت پذیری: $(\vec{P}+\vec{Q})+\vec{S} = \vec{P}+(\vec{Q}+\vec{S})$

- حالت سوم - (برآیند نیروهای متقاطع): برای تعیین برآیند نیروهای متقاطع میتوان به سادگی از قاعده‌ی چندضلعی استفاده نمود بطوریکه دو به دو نیروها را با یکدیگر در نظر گرفته و برآیند آن را با نیروی دیگر تعیین می‌نماییم.

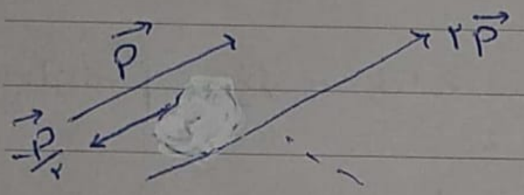


Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \dots + \vec{P}_n = n\vec{P}_1$ $\qquad |P_1| = |P_2| = \dots = |P_n|$

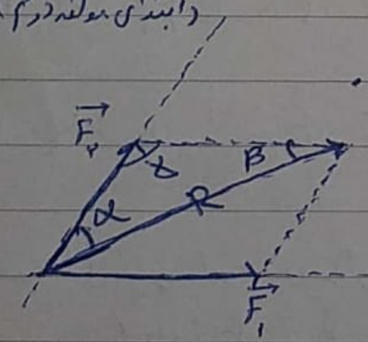


- حالت پنجم - (تجزیه نیروها): چنانچه مطرح شد بجای چند نیرو توانستیم نیروی برایند را جایگزین نماییم.

عکس این حالت نیز صادق است یعنی نیروی برایند R را میتوان به دو نیرو یا بیشتر تبدیل نمود که

به این نیروها اصطلاحاً مولفه نیرو و به فرآیند جایگذاری مذکور اصطلاحاً تجزیه نیروها می گویند. عموماً

در تجزیه نیروها امتداد مولفه ها مشخص و هدف تعیین مقدار آنهاست.



سینوس ها: $\frac{\vec{R}}{\sin\gamma} = \frac{\vec{F}_2}{\sin\beta} = \frac{\vec{F}_1}{\sin\alpha}$

کسینوس: $F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\gamma = R^2$

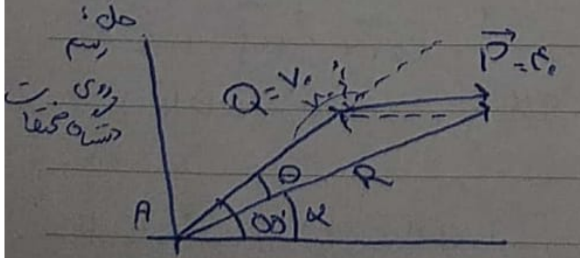
مثال:

چنانچه مطابق شکل دو نیروی $\vec{P}$ و $\vec{Q}$ بر پیچ A اثر کرده باشد، مطلوب است:

الف) تعیین برایند نیروهای مؤثر.

ب) " " زاویه‌ای که نیروی برایند با افق می‌سازد.

حل: رسم روی دستگاه مختصات



$\gamma = 180 - 55 + 30 \Rightarrow \gamma = 155°$

$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\gamma \rightarrow R^2 = 40^2 + 70^2 - 2\times 40\times 70\times\cos 155° \rightarrow R = 107.58$

$\alpha = 55 - \theta \rightarrow \frac{R}{\sin\gamma} = \frac{P}{\sin\theta} \rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{P\sin\gamma}{R}\right)$

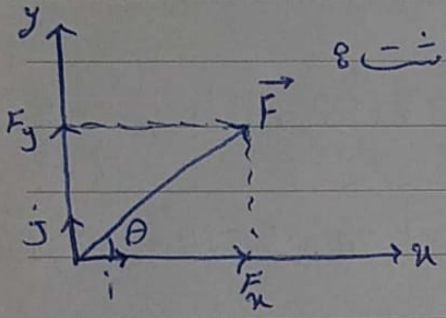
Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

- حالت ششم (مولفه های متعامد یا عمود برهم) (بردارهای یکه در فضای دوبعدی)

یکی از مرسوم ترین تجزیه ی نیروها، تجزیه به دو مولفه ی متعامد میباشد چنانچه بردار نیروی F در فضای کارتزین



دو بعدی xy مطرح شده باشد. برای تعیین مولفه های نیرو خواهیم داشت:

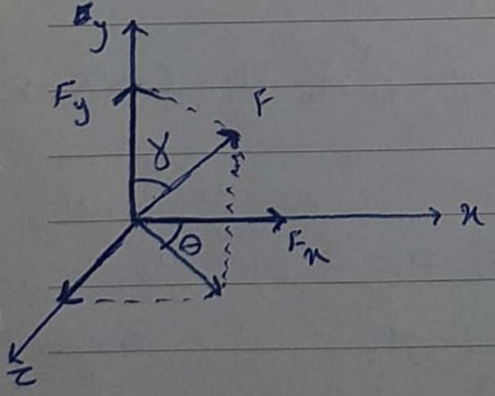
$$F = F_x + F_y = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$$F_x = F\cos\theta \ , \ F_y = F\sin\theta \longrightarrow \vec{F} = F(\cos\theta\, i + \sin\theta\, j)$$

بردار ← $\vec{F}$ ، اسکالر ← F ، جهت ← $(\cos\theta\, i + \sin\theta\, j)$

حالت هفتم (مولفه های متعامد و بردارهای یکه در فضای سه بعدی)

حال چنانچه بردار نیروی F در فضای کارتزین سه بعدی xyz مطرح شده باشد میتوان برای تعیین



مولفه های نیرو با توجه به بردارهای یکه نوشت:

$$F_y = F\cos\gamma \qquad F_{xz} = F\sin\gamma$$

$$F_x = F_{xz}\cos\theta = F\sin\gamma . \cos\theta$$

$$F_z = F_{xz} . \sin\theta = F\sin\gamma . \sin\theta$$

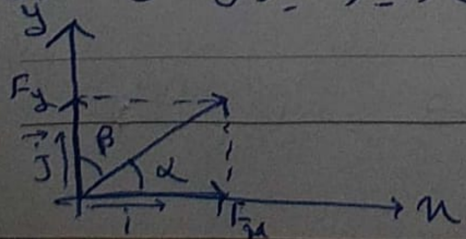
$$F = \vec{F_x} + \vec{F_y} + \vec{F_z} \longrightarrow F = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$\vec{F} = F(\sin\gamma\cos\theta\, \vec{i} + \cos\gamma\, j + \sin\gamma\sin\theta\, \vec{k})$$

بردار ← $\vec{F}$ ، اندازه ← F

- حالت هشتم (زوایای هادی و کسینوس ها): زوایه ای که یک بردار در فضای دوبعدی یا سه بعدی

با محورهای مختصات میسازد را اصطلاحا زوایای هادی و کسینوس این زوایا را کسینوس های هادی



می نامند بطور کلی در فضای دو بعدی و سه بعدی داریم:

$$F_x = F\cos\alpha \longrightarrow \lambda_x = \cos\alpha = \frac{F_x}{F}$$

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

$F_y = F\cos\beta \longrightarrow \lambda_y = \cos\beta = \frac{F_y}{F}$ — کسینوس های هادی

$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y \longrightarrow \vec{F} = F\,(\lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j})$ (F: اندازه، بردار) $\rightarrow \cos\alpha\, i + \cos\beta\, j$

زوایای هادی در فضای ۳ بعدی:

$\lambda_x = \cos\alpha = \frac{F_x}{F}$

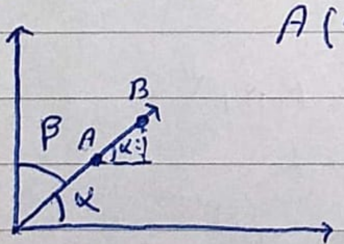
$\lambda_y = \cos\beta = \frac{F_y}{F}$

$\lambda_z = \cos\gamma = \frac{F_z}{F}$

$\Rightarrow \vec{F} = F\,(\lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k})$ (F: اندازه، پرانتز: بردار)

حالت دوم: (تعیین کسینوس های هادی): چنانچه مشاهده شد با استفاده از کسینوس های هادی توانستیم هر مقدار از نیرو را بصورت برداری نمایش دهیم. برای تعیین کسینوس های هادی کافیست تنها و تنها دو نقطه از بردار داده شده مشخص باشد. بدین ترتیب داریم:

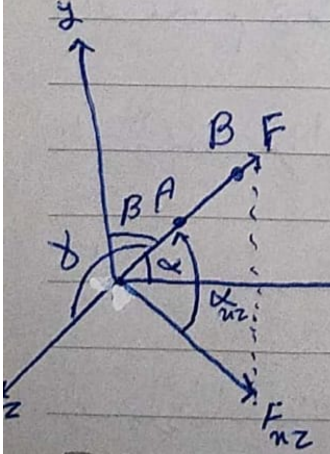
$A(x_A, y_A) \quad B(x_B, y_B)$



$\cos\alpha = \frac{x_B - x_A}{|AB|}, \quad \cos\beta = \frac{y_B - y_A}{|AB|}$ (مجاور / وتر)

$(\cos\alpha = \lambda_x, \quad \cos\beta = \lambda_y)$

$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$



بطور مشابه در حالت سه بعدی داریم:

$\cos\alpha = \lambda_x = \frac{x_B - x_A}{|AB|}$

$\cos\beta = \lambda_y = \frac{y_B - y_A}{|AB|}$

$\cos\gamma = \lambda_z = \frac{z_B - z_A}{|AB|}$

$\vec{F} = F\,(\lambda_x \vec{i} + \lambda_y \vec{j} + \lambda_z \vec{k})$

نکته: $F_{xz} = F \cdot \lambda_{xz}$

$\lambda_{xz} = \cos\alpha_{xz} = \frac{\text{اندازه‌ی تصویر } AB \text{ روی } xz}{|AB|}$

$\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

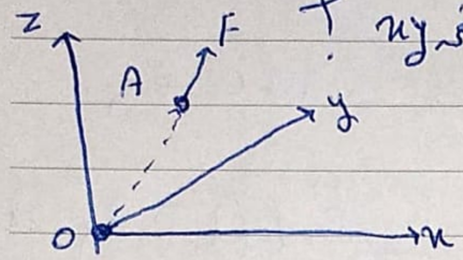
$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثال 8: چنانچه نیروی F به شدت $120\,N$ مطابق شکل به نقطه (6و5و4) عبور نماید مطلوب است

تعیین مولفه های نیروی F و همچنین اندازه ی تصویر F روی صفحه xy ؟



یافتن دو نقطه

$F = 120\,N$ و $A(4,5,6)$ و $O(0,0,0)$ مبدأ

$|OA| = \sqrt{4^2+5^2+6^2} = 8.7$

$$\vec{F} = F \cdot \lambda_{OA} = 120\,(0.455\,\vec{i} + 0.57\,\vec{j} + 0.68\,\vec{k}) = \overbrace{54\,\vec{i}}^{F_x} + \overbrace{68.4\,\vec{j}}^{F_y} + \overbrace{81.6\,\vec{k}}^{F_z}$$

$\lambda_{OA_x} = \dfrac{x_A - x_0}{|OA|} = 0.455$

$\lambda_{OA_y} = \dfrac{y_A - y_0}{|OA|} = 0.57$

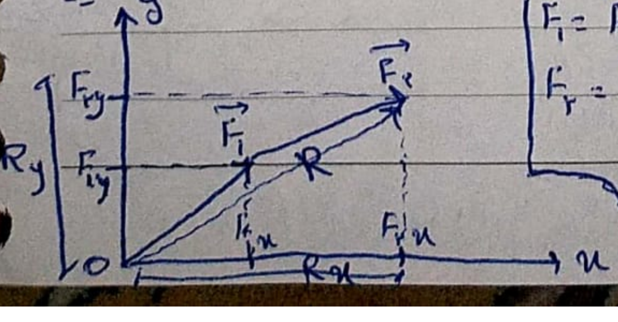
$\lambda_{OA_z} = \dfrac{z_A - z_0}{|OA|} = 0.68$

که داریم: $\lambda_{OA} = \lambda_{OA_x}\,\vec{i} + \lambda_{OA_y}\,\vec{j} + \lambda_{OA_z}\,\vec{k}$

ب) $F_{xy} = F \cdot \lambda_{xy} = 120 \times (0.73) = 88.3$

$\lambda_{xy} = \dfrac{\text{اندازه تصویر } OA \text{ روی صفحه } xy}{|OA|} = \dfrac{\sqrt{4^2+5^2}}{8.7} \longrightarrow \lambda_{xy} = 0.73$

حالت دهم: برآیند نیروها با استفاده از بردارهای یکه: اکنون به سادگی می‌توان با استفاده از بردارهای یکه و بدون توجه به قوانین سینوس ها و کسینوس ها به تعیین برآیند نیروها پرداخت. به طور مثال چنانچه بردارهای F_1 و F_2 مطابق شکل داده شده باشند برای تعیین برآیند نیرو خواهیم داشت:



$\vec{F_1} = F_{1x}\,\vec{i} + F_{1y}\,\vec{j}$

$\vec{F_2} = F_{2x}\,\vec{i} + F_{2y}\,\vec{j} \Rightarrow$

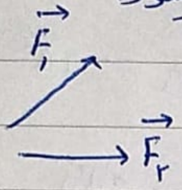
$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \Rightarrow R = (F_{1x}+F_{2x})\,\vec{i} + (F_{1y}+F_{2y})\,\vec{j}$

$\longrightarrow \vec{R} = \Sigma F_x\,\vec{i} + \Sigma F_y\,\vec{j} = R_x + R_y$

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

حالت یازدهم (ضرب داخلی دو بردار): ضرب داخلی یا اسکالر یا نقطه‌ای یا عددی دو بردار که حاصل آن یک عدد است از حاصل ضرب اندازه‌ی دو بردار در کسینوس زاویه ما بین نتیجه میشود:



$$\vec{F_1}\cdot\vec{F_2} = |F_1||F_2|\cos\theta$$

$$\vec{F_1} = F_{1x}\vec{i} + F_{1y}\vec{j} + F_{1z}\vec{k}$$

$$\vec{F_2} = F_{2x}\vec{i} + F_{2y}\vec{j} + F_{2z}\vec{k}$$

$$\vec{F_1}\cdot\vec{F_2} = F_{1x}F_{2x} + F_{1y}F_{2y} + F_{1z}F_{2z}$$

$\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$ $\Rightarrow \theta=0 \rightarrow \cos\theta=1$

$\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, ... $\Rightarrow \theta=90 \rightarrow \cos\theta=0$

نکته: با استفاده از ضرب داخلی میتوان تصویر هر نیرو را بر روی هر امتداد دلخواه دیگر تعیین نمود. به طور مثال: چنانچه هدف تعیین تصویر نیروی P بر روی امتداد دلخواه l باشد داریم:

$$\vec{P}\cdot\vec{Q} = |P||Q|\cos\theta \quad (I)$$

۱- فرض یک بردار Q بر روی l

۲- برقراری ضرب داخلی بین $\vec{Q}$ و $\vec{P}$

$$P_{ol} = |P|\cos\theta \quad (II)$$

۳- از طرفی برای اندازه تصویر P بر روی l داریم:

۴- از تساوی II و I داریم:

$$\rightarrow P_{ol} = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|Q|} = \frac{P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z}{|Q|}$$

$$\rightarrow P_{ol} = P_x\cdot\underbrace{\frac{Q_x}{|Q|}}_{\lambda_{lx}} + P_y\cdot\underbrace{\frac{Q_y}{|Q|}}_{\lambda_{ly}} + P_z\cdot\underbrace{\frac{Q_z}{|Q|}}_{\lambda_{lz}} \rightarrow \text{(برداری)}\ \vec{P_{ol}} = P_{ol}\cdot\vec{\lambda}$$

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثال: مطلوب است تعیین جبری و برداری $\vec{P}$ در امتداد $\vec{Q}$:

$$4\begin{cases}\vec{P} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}\\ \vec{Q} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + \vec{k}\end{cases}$$

$|Q| = \sqrt{3^2+5^2+1^2} = 5.9$

$\lambda_{Q_x} = \frac{Q_x}{|Q|} = \frac{3}{5.9} = 0.5$

$\lambda_{Q_y} = \frac{Q_y}{|Q|} = \frac{-5}{5.9} = -0.84$

$\lambda_{Q_z} = \frac{Q_z}{|Q|} = \frac{1}{5.9} = 0.16$

$$\lambda_Q = \lambda_{Q_x}\vec{i} + \lambda_{Q_y}\vec{j} + \lambda_{Q_z}\vec{k} \rightarrow$$

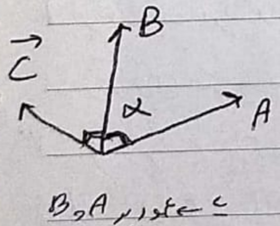
جبری $\rightarrow P_Q = P \cdot \lambda_Q = (2)(0.5) + (3)(-0.84) + (5)(0.16)$

$\rightarrow P_Q = -0.72$

عدد — $0.5i + 0.84j + 0.16k$

برداری $\longrightarrow \vec{P_Q} = P_Q\,(\lambda_Q) = -0.36\vec{i} + 0.6\vec{j} - 0.11\vec{k}$

حالت دوازدهم (ضرب خارجی دو بردار): ضرب خارجی یا برداری دو بردار که حاصل آن یک بردار است از حاصل ضرب اندازه‌ی دو بردار در سینوس مابین تشکیل میشود. جهت بردار حاصل ضرب نیز از قانون دست راست پیروی میکند

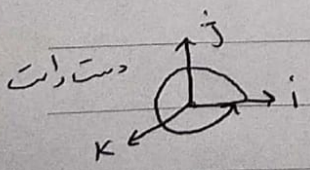


$$|C| = |A||B|\sin\alpha$$

$$\vec{C} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \vec{i}(A_yB_z - B_yA_z) + \vec{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \vec{k}(A_xB_y - A_yB_x)$$

$\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ (جابجایی پذیری ندارد)

$A\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B} + \vec{A}\times\vec{C}$



$i\times j = k$, $j\times i = -k$

$j\times k = i \quad k\times i = j$

$i\times i = 0 \longrightarrow \theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0$ و ...

$A \parallel B \longrightarrow \vec{A}\times\vec{B} = 0$ (موازی بودن)

حالت سیزدهم (حاصلضرب مختلط سه بردار): حاصلضرب مختلط سه بردار که حاصل آن یک عدد است

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

از حاصلضرب برداری دو بردار در اسکالر، بردار سوم نتیجه میدهد.

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

فصل دوم بخش سوم: (تعادل ذره و نمودار آزاد جسم) هرگاه برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر باشد، آن ذره در حال تعادل است و برعکس. شرط لازم و کافی برای آنکه برآیند نیرو صفر شود آن است که تک تک مؤلفه‌های نیرو صفر شود.

تعادل ذره $= \vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j}$

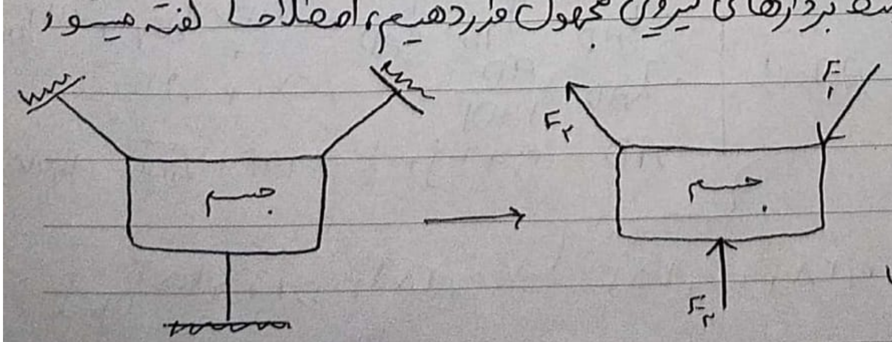
تعادل (دو بعدی) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} R_x = \Sigma F_x = 0 & (1) \\ R_y = \Sigma F_y = 0 & (2) \end{cases}$$

تعادل ذره (سه بعدی) $\rightarrow \vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k} \rightarrow$

$$\begin{cases} R_x = \Sigma F_x = 0 & (1) \\ R_y = \Sigma F_y = 0 & (2) \\ R_z = \Sigma F_z = 0 & (3) \end{cases}$$

نمودار آزاد جسم: وقتی یک جسم از کلیه اجسام دیگر که در ارتباط با آن هستند، جدا کنیم و اثر این اجسام را در جسم منظور توسط بردارهای نیروی مجهول قرار دهیم، اصطلاحاً گفته میشود نمودار آزاد جسم حاصل شده است.



(نمودار آزاد جسم) $\rightarrow$ (FBD)

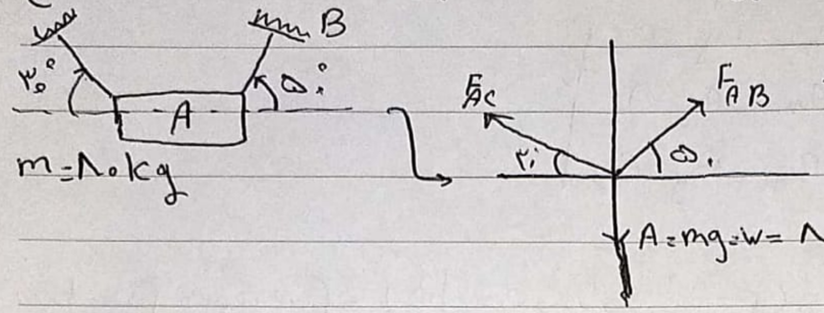
Free Body Diagram

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثال ۵

جعبه‌ای به جرم ۸۰kg مطابق شکل توسط کابل های AB و AC ثابت نگه داشته شده است. مطلوب است تعیین نیروی کشش در کابل ها؟



$A = mg = W = 80 \times 9.81$

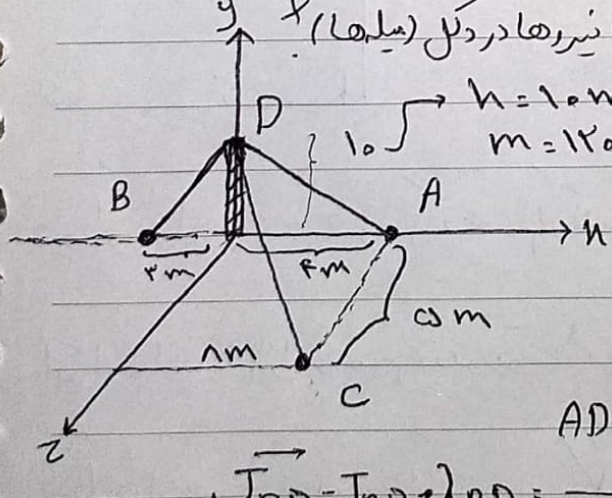
$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow T_{AB}\cos 50 - T_{AC}\cos 30 = 0 \longrightarrow T_{AB} = \frac{\cos 30}{\cos 50} \cdot T_{AC} \longrightarrow T_{AB} = 1.3\, T_{AC}$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow T_{AC}\sin 30 + T_{AB}\sin 50 - W = 0 \longrightarrow \frac{1}{2}T_{AC} + 1.3\sin 50\, T_{AC} = W$

$\longrightarrow$ حل شود = ؟ $\quad T_{AC} = W \Rightarrow T_{AC} = \frac{W}{1.4} \rightarrow T_{AB} = \frac{80 \times 9.81}{1.4} \times 1.3$

مثال ۵ دکلی به ارتفاع ۱۰ متر و به جرم ۱۲۰kg مطابق شکل توسط سه سیم AD, BD, CD ثابت نگه داشته شده است. مطلوب است. الف) تعیین اندازه نیروها در دکل (سیم‌ها)؟

ب) تعیین مؤلفه نیرو در سیم‌ها؟



$h = 10m$
$m = 120kg$

$A(4,0,0)$ $\quad C(8,0,5)$

$B(-3,0,0)$ $\quad D(0,10,0)$

برای AD:

$\vec{T}_{AD} = T_{AD} \cdot \lambda_{AD} = -0.37\, T_{AD}\vec{i} + 0.92\, T_{AD}\vec{j}$ (T_{ADx}, T_{ADy})

$\lambda_{AD} = \frac{AD}{|AD|} = -0.37\vec{i} + 0.92\vec{j}$

$AD = -4\vec{i} + 10\vec{j} + 0k \rightarrow |AD| = \sqrt{16+100} = 10.77$

برای BD:

$\vec{T}_{BD} = T_{BD} \cdot \lambda_{BD} = 0.28\, T_{BD}\vec{i} + 0.95\, T_{BD}\vec{j}$ (T_{BDx}, T_{BDy})

$\lambda_{BD} = \frac{BD}{|BD|} = 0.28\vec{i} + 0.95\vec{j}$

$BD = 3\vec{i} + 10\vec{j} \longrightarrow |BD| = \sqrt{9+100} = 10.44$

Sahand

DATE / / SUBJECT:

برای CD:

$\vec{T}_{CD} = T_{CD} \cdot \vec{\lambda}_{CD} = -0.58 T_{CD}\vec{i} + 0.72 T_{CD}\vec{j} + 0.34 T_{CD}\vec{k}$

$\lambda_{CD} = \frac{CD}{|CD|} = -0.58\vec{i} + 0.72\vec{j} + 0.34\vec{k}$

$\vec{CD} = -8\vec{i} + 10\vec{j} - 5\vec{k}$, $|CD| = \sqrt{8^2+10^2+5^2} = 13.74$

(I) $\Sigma F_x = 0 \longrightarrow -0.37 T_{AD} + 0.28 T_{BD} - 0.58 T_{CD} = 0$ (T_{CD}: 0)

(II) $\Sigma F_y = 0 \longrightarrow 0.92 T_{AD} + 0.95 T_{BD} + 0.72 T_{CD} = 0$ (T_{CD}: 0)

$\Sigma F_z = 0 \longrightarrow -0.34 T_{CD} = 0 \longrightarrow T_{CD} = 0$ ✓

(I)(II) $\longrightarrow 0.37 T_{AD} = 0.28 T_{BD} \longrightarrow T_{AD} = \frac{0.28}{0.37} T_{BD} = 0.75 T_{BD}$

* نیروی وزن

$0.92 \times 0.75 T_{BD} + 0.95 T_{BD} = W \longrightarrow 1.64 T_{BD} = W$

$T_{BD} = \frac{120 \times 9.81}{1.64} = 1014.8\ (N) \longrightarrow \vec{T}_{BD} = 0.28(1014.8)\vec{i} + 0.95(1014.8)\vec{j}$

$T_{AD} = 761.1\ (N) \longrightarrow (T_{AD} = 0.75 T_{BD}) \longrightarrow \vec{T}_{AD} = -0.37(761.1)\vec{i} + 0.92(761.1)\vec{j}$

$T_{CD} = 0 \longrightarrow \vec{T}_{CD} = 0.58(0)\vec{i} + 0.72(0)\vec{j}$

* گشتاور (ممان یا لنگر) که نیرو علاوه بر تمایل به حرکت درآوردن یک جسم در راستای اثرش میخواهد آن را حول یک نقطه یا محور بچرخاند، این میل به چرخاندن را اصطلاحاً گشتاور (M) می‌نامند.

Sahand

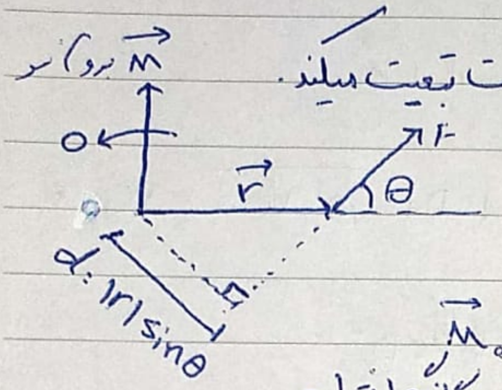
Scanned by CamScanner

$M_L = M_o \cdot \lambda_L$

$\vec{M}_L = M_L \cdot \lambda_L$

DATE / / SUBJECT:

گشتاور حول نقطه: گشتاور بردار نیروی F حول نقطه‌ی دلخواه O از حاصلضرب برداری بردار موقعیت در بردار نیرو نتیجه میشود، جهت بردار گشتاور نیز از قانون دست راست تبعیت میکند.



$\vec{r}$: بردار موقعیت $\longrightarrow \vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j}$

$\vec{F}$: بردار نیرو $\longrightarrow \vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$

$\vec{M}_o = \ldots = \vec{r} \times \vec{F} \longrightarrow \vec{M} = M_z \vec{k} = (r_x F_y - r_y F_x)\vec{k}$

گشتاور حول نقطه O — گشتاور حول محور

$|M_o| = |r| \cdot |F| \cdot \sin\theta$

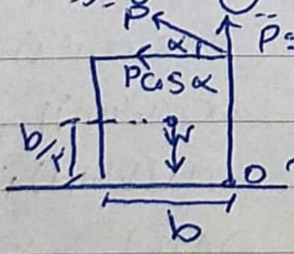
$|M_o| = |F| \cdot d$

d فاصله عمودی امتداد نیرو تا نقطه محور دوران

بیرون سو (↺) — درون سو (↻)

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \vec{i}(r_y F_z - r_z F_y) + \vec{j}(r_z F_x - r_x F_z) + \vec{k}(r_x F_y - r_y F_x)$$

مثال: جعبه‌ای مربع شکل به وزن W مطابق شکل بروی سطح افقی در حال سکون است. چنانچه نیروی P به صورت مورب با زاویه‌ی مؤثر α بر جعبه اعمال شود مطلوب است تعیین حداقل نیروی P که برای به حرکت درآوردن جعبه لازم است چقدر است؟



$P_{min} = ? \longrightarrow \Sigma M_o = 0 \longrightarrow P\cos\alpha \cdot b + P\sin\alpha \cdot b + (-W b/2) = 0$ (موقعیت)

$\longrightarrow P b(\cos\alpha + \sin\alpha) = W b/2$

$\longrightarrow P = \dfrac{W}{2(\cos\alpha + \sin\alpha)}$ برای P_{min} باید مخرج max شود ← مشتق مخرج $= 0 \longrightarrow -\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$\rightarrow \cos\alpha = \sin\alpha \rightarrow \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1 \rightarrow \tan\alpha = 1 \rightarrow \alpha = \pi/4$

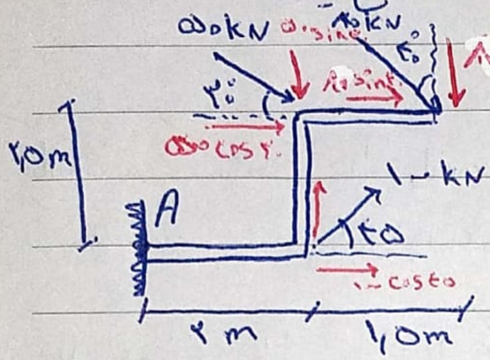
$\longrightarrow P_{min} = \dfrac{W}{2(\sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2)} = \dfrac{W}{2\sqrt{2}}$

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثال: مطلوب است تعیین گشتاور حاصل از نیروهای مؤثر بر سقف زیر در نقطه‌ی A ؟



$M_A = (80\cos 40)(+3.5) + (80\sin 40)(2.5)$

$+ (50\cos 30)(2.5) + (50\sin 30)(2)$

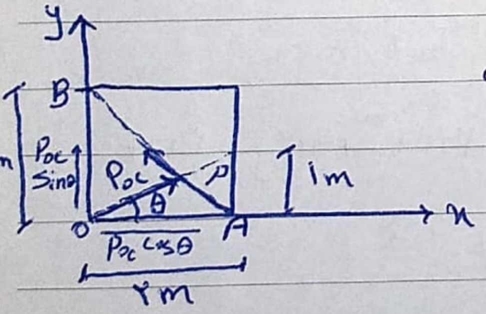
$- (100\sin 45)(2) \rightarrow M_A = 359.88\ kN.m$

سمت بیرون سو

اگر نیرو از امتداد نقطه مورد نظر رد شود گشتاور نداریم مثل $100\cos 45$

مثال:

نیروی به شدت 20 N مطابق شکل در امتداد قطر A و B از سر بعی اثر میکند. مطلوب است تعیین مؤلفه‌ای از P در امتداد OC با جهت مثبت از O به C ؟ ب) تعیین گشتاور حاصل از این نیرو نسبت به نقطه A ؟



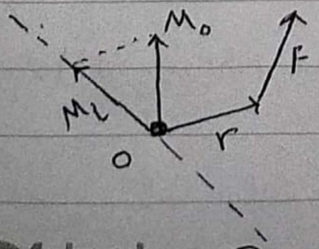
الف) $P_{OC} = P_{AB}\cdot\lambda_{OC} \rightarrow P_{AB} = P\cdot\lambda_{AB}$

$\rightarrow \lambda_{AB} = \frac{\vec{AB}}{|AB|}$

$\rightarrow \lambda_{OC} = \frac{\vec{OC}}{|OC|}$

ب) $M_A = P_{OC}\sin\theta \cdot 2m$

گشتاور نسبت به یک محور: گشتاور بردار نیروی F نسبت به یک محور دلخواه (L) از تصویر گشتاور نسبت به نقطه O بر روی محور (L) نتیجه می‌شود. بطوریکه داریم:



$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$M_L = M_0 \cdot \lambda_L$ (اسکالر)

$\vec{M}_L = M_L \cdot \lambda_L$

ضرب مختلط سه بردار: ① $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ و ② $\vec{r} = r_x\vec{i} + r_y\vec{j} + r_z\vec{k}$ و ③ $\vec{\lambda}_L = \lambda_{Lx}\vec{i} + \lambda_{Ly}\vec{j} + \lambda_{Lz}\vec{k}$

Scanned by CamScanner

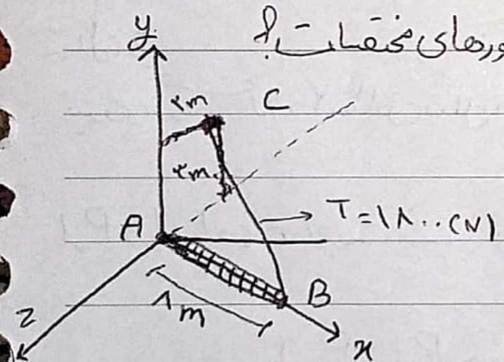
DATE / / SUBJECT:

(اسکالر) $M_L = \vec{\lambda}_L \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} \lambda_{Lx} & \lambda_{Ly} & \lambda_{Lz} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$

نکته: نیرویی که محوری را قطع میکند، حول آن گشتاور نداریم.

" " : نیرویی که با محور موازی است، حول آن محور گشتاور نداریم.

مثال: عضوی به طول ۸ متر مطابق شکل توسط کابل BC مهار شده است. چنانچه کشش حاصل از کابل BC برابر ۱۸۰۰N باشد. مطلوب است: تعین گشتاور این نیرو حول محورهای مختصات؟



* $M_A = r_A \times T_{BC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 0 & 0 \\ -1638 & 612 & -396 \end{vmatrix} = -\vec{j}(8 \times 396) + \vec{k}(8 \times 612)$

(پایین)

$T_{BC}\lambda_x \quad T_{BC}\lambda_y \quad T_{BC}\lambda_z$

روش حل: $\vec{r}_{B/A} = 8\vec{i}$ $\quad \vec{T}_{BC} = T \cdot \lambda_{BC} = -1638\vec{i} + 612\vec{j} - 396\vec{k}$

$\lambda_{BC} = \frac{\vec{BC}}{|BC|} = 0.91\vec{i} + 0.34\vec{j} - 0.22\vec{k}$

$B(8,0,0)$ و $C(0,3,-2) \longrightarrow BC = -8\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \longrightarrow |BC| = \sqrt{64+9+4} = 8.7$

* $\vec{M}_A = 3168\vec{i} + 4896\vec{j} \longrightarrow$
$M_x = M_A \cdot \vec{i} = 0$
$M_y = M_A \cdot \vec{j} = 3168\ N.m$
$M_z = M_A \cdot k = 4896\ N.m$

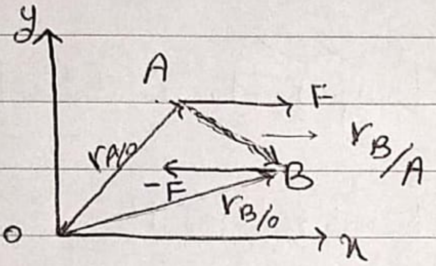
کوپل (زوج نیرو): دو نیروی مساوی موازی و مختلف الجهت را که در یک صفحه قرار دارند اصطلاحاً زوج نیرو یا کوپل می‌نامند. چنانچه یک زوج نیرو بر جسم صلبی اثر نماید هیچگونه حرکت انتقالی در جسم ایجاد نشده بلکه

Sahand

Scanned by CamScanner

جسم تنها دوران) میکند. حاصل زوج نیرو یک گشتاور است که مقدار این گشتاور از حاصلضرب اندازه ی یکی از نیروها

در فاصله ی عمود بین دو نیرو نتیجه میشود. (نکته: گشتاور زوج نیرو مستقل از محورهای مختلف میباشد.)

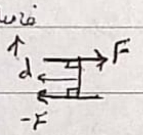


اثبات
$$\begin{cases} \vec{M_1} = r_{A/O} \times F \\ \vec{M_2} = r_{B/O} \times (-F) \end{cases} \Rightarrow M_{\text{کوپل}} = \vec{M_1} + \vec{M_2}$$

(فاصله از F)

$$\rightarrow M_{\text{کوپل}} = \underbrace{(r_{A/O} - r_{B/O})}_{r_{B/A}} \times \vec{F} = r_{B/A} \times \vec{F}$$

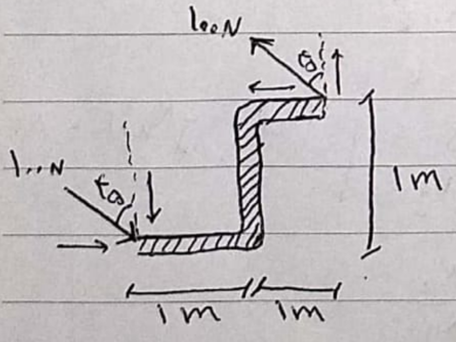
نتیجه:



$M = F \cdot d$

$$\begin{cases} \Sigma F = 0 & \text{حرکت نداریم (برآیند نیروها صفر)} \\ \Sigma M \neq 0 & \text{دوران داریم} \end{cases}$$

مثال: مطلوب است از تعیین گشتاور حاصل از زوج نیروی مؤثر و مقطع ح شکل زیر.

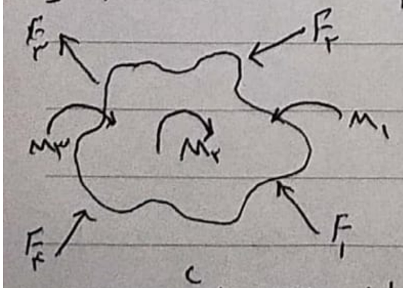


فرض (+) برون سو

$M_O = 100 \sin 45 \times 1 + 100 \cos 45 \times 2$

$\Rightarrow M_O = 212.13 \ N.m \ \vec{k}$

سیستم های نیرویی: به مجموعه ای از چند کوپل نیرو و گشتاور موثر بر یک جسم را اصطلاحاً یک سیستم نیرویی



مینامند.

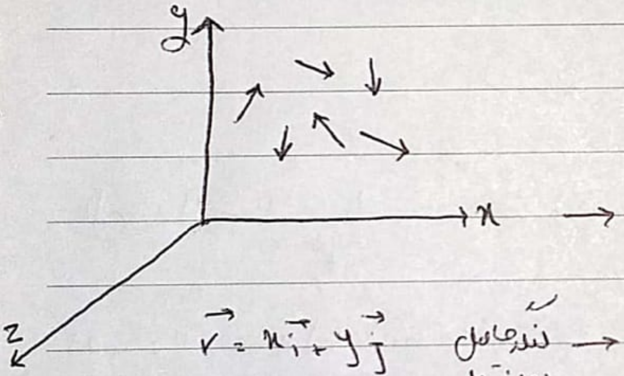
هدف از این بخش خلاصه سازی سیستم نیرویی به یک نیروی برایند R و یک کوپل برایند M_R میباشد. پس

جهت خلاصه سازی بیشتر مسئله با انتقال مجدد نیروی برایند اثر کوپل برایند را نیز از بین میبریم

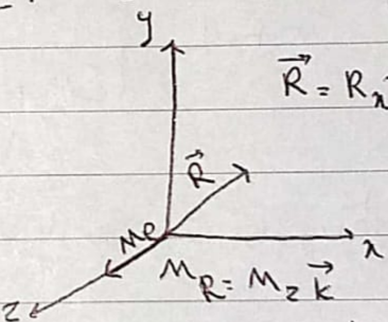
DATE / / SUBJECT:

بنابراین یک سیستم نیروی خواهیم داشت که تنها شامل یک نیروی برایند میباشد.

خلاصه‌سازی سیستم نیروی هم صفحه: برای خلاصه‌سازی سیستم نیروی هم صفحه ابتدا کلیه نیروها را به مبدأ مختصات منتقل میکنیم که در اثر این انتقال نیروی برایند دو مولفه‌ای و لنگر برایند تک مولفه‌ای ایجاد میشود، سپس با انتقال مجدد نیروی برایند اثر لنگر برایند را نیز خنثی می‌نماییم. (سیستمی را سیستم نیروی هم صفحه مینامند که کلیه نیروهای داخل صفحه قرار گرفته و برایند نیروها شامل دو مولفه و برایند لنگر شامل یک مولفه باشد.)



$\vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j}$



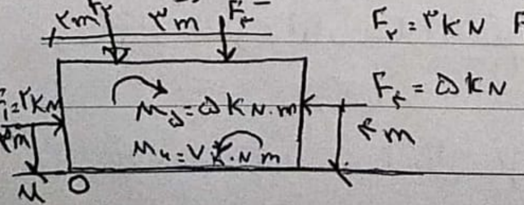
$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ لنگر حاصل از انتقال $\rightarrow \vec{r}\times\vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix} = (xR_y - yR_x)\vec{k} = M_z\vec{k}$

محل تلاقی با محور xها: $y=0 \rightarrow xR_y = M_z \Rightarrow x = \frac{M_z}{R_y}$

محل تلاقی با محور yها: $x=0 \rightarrow y \times R_x = M_z \Rightarrow y = \frac{-M_z}{R_x}$

$\vec{r} = \frac{M_z}{R_y}\vec{i} - \frac{M_z}{R_x}\vec{j}$

مثال: سیستم نیروی هم صفحه زیر داده شده است. مطلوب است تعیین نیروی برایند و هم چنین تعیین محل تلاقی نیروی برایند با محورهای x و y.



$F_2 = 3kN$ $F_3 = 4k$

$F_4 = 5kN$

4m

$\vec{F}_1 = 2\vec{i} \Rightarrow \vec{M}_1 = 4 kN.m \vec{k}$

$\vec{F}_2 = -3\vec{j}$ $\vec{M}_2 = 6 kN.m \vec{k}$

$\vec{F}_3 = -3\vec{j}$ $\vec{M}_3 = -15 kNm \vec{k}$

$\vec{F}_4 = -5\vec{i}$ $\vec{M}_4 = -20 kNm \vec{k}$

$M_5 = 5 kN.m\vec{k}$ $M_6 = -7 kNm\vec{k}$

Sahand

Scanned by CamScanner

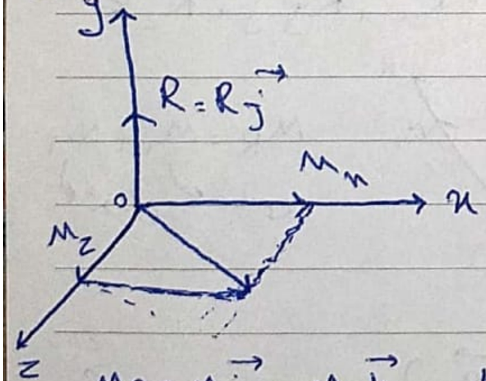
DATE / / SUBJECT:

$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 \Longrightarrow \vec{R} = -3\vec{i} - 6\vec{j}$, $M_R = M_1 + M_2 + \dots + M_4 = 3\,kN\,\vec{k} = M_z$

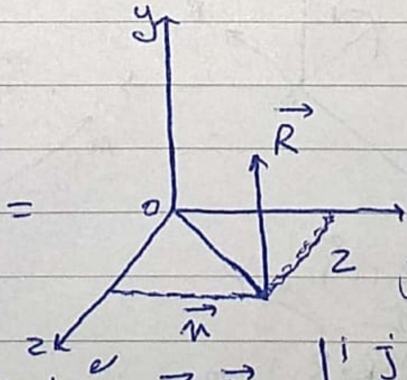
$x = \frac{M_x}{R_y} = \frac{3}{-6} = 0.5\,m$ $\qquad y = \frac{-M_z}{R_x} = \frac{-3}{-3} = 1\,m \longrightarrow \vec{r} = -0.5\vec{i} + 1\vec{j}$

خلاصه سازی سیستم های نیروی موازی با محور:

در این قسمت میخواهیم به خلاصه سازی سیستم نیروی بپردازیم که نیروها با یکی از محورهای مختصات موازی می باشند. برای خلاصه سازی مشابه قبل کلیه نیروها را به مبدأ مختصات منتقل میکنیم. در اثر این انتقال نیروی برایند یک مولفه ای و لنگر برایند دو مولفه ای تشکیل می گردد. سپس در ادامه با انتقال مجدد نیرو برایند اثر لنگر برایند را نیز خنثی می کند به طوری که ← مثال: چنانچه سیستم نیروی مد نظر باشد که نیروها با محور y موازی باشند بنابراین داریم:



=



$(-zR)\vec{i} + (xR)\vec{k} = M_x\vec{i} + M_z\vec{k}$

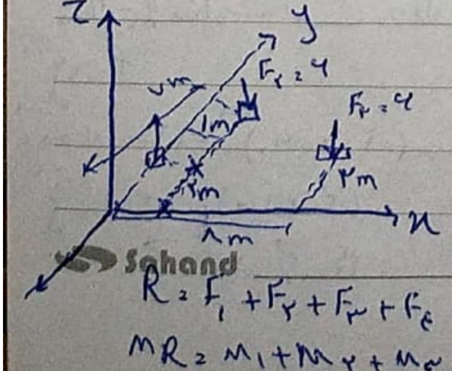
$-zR = M_x \rightarrow z = \frac{-M_x}{R}$

محل تلاقی

$xR = M_z \rightarrow x = \frac{M_z}{R}$

$M_R = M_x\vec{i} + M_z\vec{k}$ $\qquad$ لنگر حاصل از انتقال $= \vec{r} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & 0 & z \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} =$

مثال: مطلوب است خلاصه سازی سیستم نیروی زیر به یک نیروی برایند و همچنین تعیین محل تلاقی این نیرو با صفحه xy؟



$F_1 = 5\vec{k} \longrightarrow M_1 = 10\,kN.m\,\vec{i}$

$F_2 = -6\vec{k} \longrightarrow M_2 = -42\vec{i} + 6\vec{j}$

$F_3 = -4 \rightarrow M_3 = -24\vec{i} + 12\vec{j}$

$F_4 = -5 \rightarrow M_4 = -15\vec{i} + 15\vec{j}$

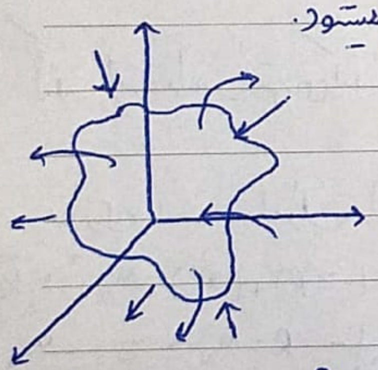
$R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \rightarrow R = -10\vec{k}$

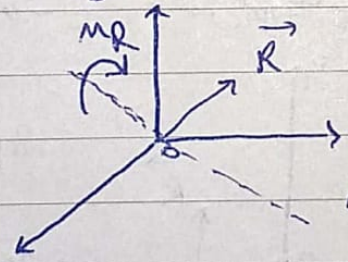
$M_R = M_1 + M_2 + M_3 + M_4 \rightarrow M_R = -71\vec{i} + 33\vec{j}$ $\Big\} \rightarrow x = 3.4\,m \;,\; y = 7.1\,m$

Scanned by CamScanner

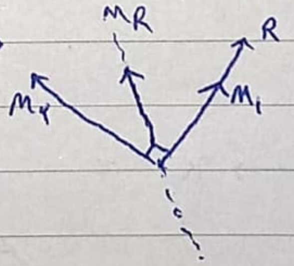
DATE / / SUBJECT:

خلاصه سازی سیستم نیروی در حالت کلی : در این قسمت میخواهیم به خلاصه سازی سیستم نیروی برآیند که نیروها در حالت کلی و در امتداد های مختلف بر سیستم اثر کردن است. مشابه قبل کلیه نیروها را به مبدأ مختصات منتقل میکنیم در اثر این انتقال نیروی برآیندی شکل میگیرد که ترجیحاً دارای سه مولفه بوده و لنگر برآیندی بدست می آید که حول محوری است که بر نیروی برآیند عمود نیست. در ادامه لنگر برآیند را به دو مولفه تجزیه میکنیم یکی در امتداد نیروی برآیند (مولفه مماسی) و دیگری عمود بر امتداد نیروی برآیند (مولفه عمودی). در نهایت در انتقال مجدد نیروی برآیند به همراه لنگر مماسی اثر لنگر عمودی را خنثی میکنیم. (به سیستم نیروی باقیمانده اصطلاحاً ریچ گفته میشود.)





$$R = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k}$$



$$M_R = M_1 + M_2$$

(عمودی) (مماسی)

(اسکالر) $M_1 = M_R \cdot \frac{R}{|R|}$ (گام ریچ) P

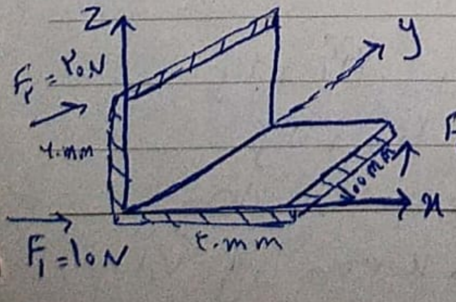
(برداری) $\vec{M_1} = M_1 \cdot \frac{R}{|R|} = \frac{M_R \cdot R}{|R|^2} \cdot R \Rightarrow M_1 = P \cdot \vec{R}$

$\vec{M_2} = \vec{r} \times \vec{R}$ نقطه حاصل از انتقال

$$M_R = \underbrace{P.R}_{M_1} + \underbrace{\vec{r} \times \vec{R}}_{M_2}$$

بردار موقعیت (مهم)

مثال : مطلوب است خلاصه سازی سیستم نیروی زیر به یک ریچ و همچنین تعیین محل تلاقی ریچ با صفحه x,y



$F_3 = 30 N$

$F_1 = 10\vec{i} \rightarrow M_1 = 0$

$F_2 = 20\vec{j} \rightarrow M_2 = (-20 \times 60)\vec{i} = 1200\ N.mm\ \vec{i}$

$F_3 = 30\vec{k} \rightarrow M_3 = (30 \times 100)\vec{i} - 30 \times 40\vec{j}$

$= 3000\vec{i} - 1200\vec{j}$

Scanned by CamScanner

$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} \longrightarrow (\vec{R} = 10\vec{i} + 20\vec{j} + 30\vec{k})$

$(M_R = 1800\vec{i} - 1200\vec{j}) \longrightarrow M_R = P \cdot R = r \times R \Rightarrow P = \dfrac{M_R \cdot R}{|R|^2}$

$|R| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 30^2} = 37.4 \ (N)$

$\longrightarrow P = \dfrac{10 \times 1800 - 20 \times 1200}{(37.4)^2} = -4.28$

$r = x\vec{i} + y\vec{j} \longrightarrow \vec{r} \times \vec{R} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ 10 & 20 & 30 \end{vmatrix} = \vec{i}(30y) + \vec{j}(-30x) + \vec{k}(20x - 10y)$

$1800\vec{i} + (-1200)\vec{j} = -4.28(10\vec{i} + 20\vec{j} + 30\vec{k}) + (30y)\vec{i} + (-30x)\vec{j} + (20x - 10y)\vec{k}$

$$\begin{cases} 1800 = -42.8 + 30y \longrightarrow y = 61.42\,mm \\ -1200 = -85.6 - 30x \longrightarrow x = 37.14\,mm \\ 0 = -4.28 \times 30 + 20x - 10y \end{cases}$$

فصل سوم: (تعادل اجسام) چنانچه گفته شد یک سیستم نیروی را میتوان به یک نیروی برایند R و یک کوپل برایند M_R خلاصه نمود. شرط لازم و کافی برای آنکه آن جسم در تعادل باشد آن است که نیروی برایند و کوپل برایند برابر صفر قرار گیرد، به طوری که داریم:

تعادل اجسام: (۲ بعدی)

$$\begin{cases} \vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = 0 \rightarrow R_x = \Sigma F_x = 0 \quad (1), \quad R_y = \Sigma F_y = 0 \quad (2) \\ \vec{M_R} = M_z\vec{k} = 0 \longrightarrow \Sigma M_z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

تعادل اجسام: (۳ بعدی)

$$\begin{cases} \vec{R} = R_x\vec{i} + R_y\vec{j} + R_z\vec{k} = 0 \longrightarrow R_x = \Sigma F_x = 0 \quad (1), \quad R_y = \Sigma F_y = 0 \quad (2), \quad R_z = \Sigma F_z = 0 \quad (3) \\ \vec{M_R} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k} = 0 \longrightarrow \Sigma M_x = 0 \quad (4), \quad \Sigma M_y = 0 \quad (5), \quad \Sigma M_z = 0 \quad (6) \end{cases}$$

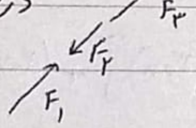
Sahand

Scanned by CamScanner

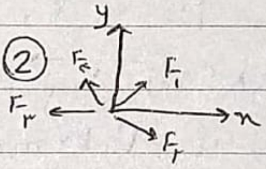
DATE / / SUBJECT:

بررسی حالات خاص: بسته به نوع سیستم و شرایط بارگذاری حاکم از سه معادله تعادل در صفحه و معادله تعادل در فضا تنها از برخی معادلات بهره گرفته میشود. (بطور مثال میتوان) نوشت:

① نیروها در امتداد یک محور ② نیروهای متقاطع در صفحه ③ نیروهای متقاطع با یک محور در صفحه ④ نیروهای موازی با یک محور در صفحه ⑤ نیروهای متقاطع در فضا ⑥ نیروهای موازی با یک محور در فضا ⑦ نیروهای متقاطع با یک محور در فضا

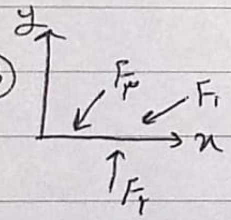
① 

$\Sigma F_x = 0$

② 

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

③ 

$\Sigma F_x = 0$

$\Sigma F_y = 0$

$\Sigma M = 0$

④

* یه سؤال (توضیح هس) ...... ؟

تکیه گاه های سازه های دوبعدی: برای اینکه یک جسم بتواند تعادل خود را در فضا حفظ نماید می بایست به صورت مناسب به اجسام دیگر و در نهایت به زمین متصل شود. این اجسام که جسم مورد نظر را نگه داشته اند اصطلاحاً تکیه گاه نامیده میشوند. برای آنکه اثر تکیه گاه را بر روی اجسام بررسی نماییم می بایست ابتدا نمودار آزاد جسم را رسم کرده سپس بر روی جسم کلیه نیروهای موثر (نیروهای خارجی) به همراه عکس العمل های مجهول تکیه گاه ها را قرار دهیم. در نهایت با برقراری معادلات تعادل در صفحه به تعیین عکس العمل مجهول تکیه گاه ها میپردازیم.

Sahand

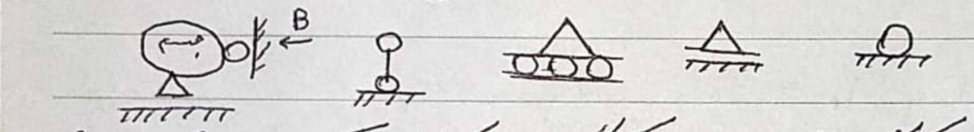
Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

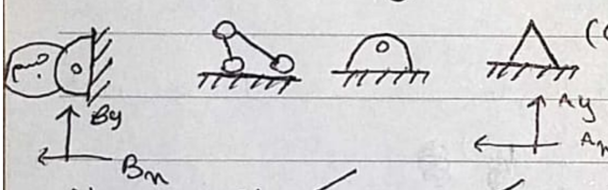
نکته ۰ همواره در تکیه‌گاه‌ها امتداد عکس العمل از اهمیت بالایی برخوردار است ، بطوریکه با فرض یک جهت مسئله را حل کرده و چنانچه مقدار حاصل برای عکس العمل مثبت باشد یعنی جهت فرض شده صحیح بوده در غیر اینصورت عکس جهت فرض شده قابل قبول است.

تکیه‌گاه‌های سازه‌ای (اشکال کتاب) - دو بعدی

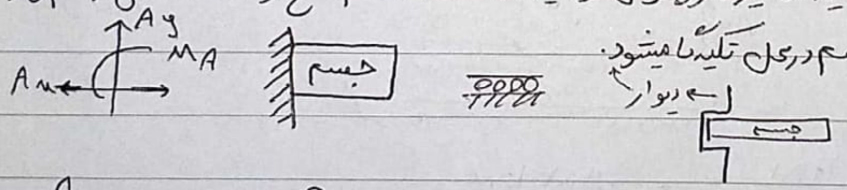
۱- تکیه‌گاه غلتکی ، نوعی از تکیه‌گاه است که مانع حرکت جسم در امتداد عمود در صفحه میشود (تک مجهولی)



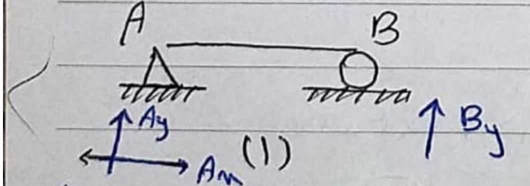
۲- تکیه‌گاه مفصلی ، نوعی از تکیه‌گاه است که مانع حرکت جسم (حرکت انتقالی) از مفصل تکیه‌گاه میشود (دو مجهولی)

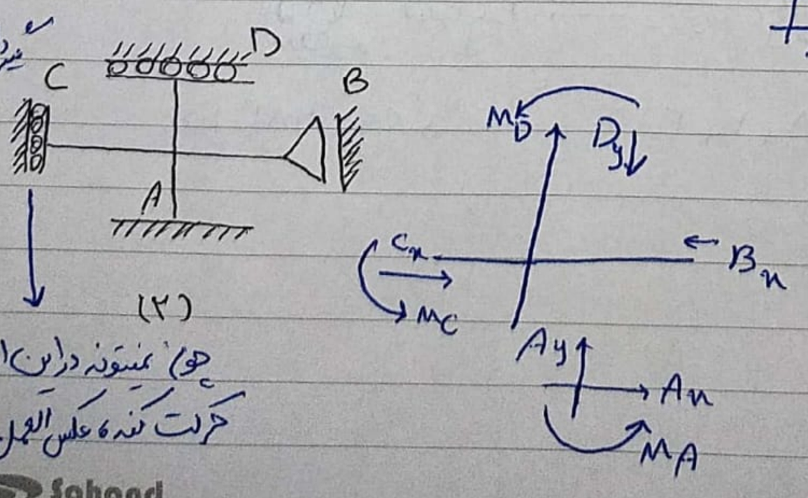


۳- تکیه‌گاه گیردار ، نوعی از تکیه‌گاه است که هم مانع از حرکت انتقالی و هم چرخش جسم در محل تکیه‌گاه میشود.

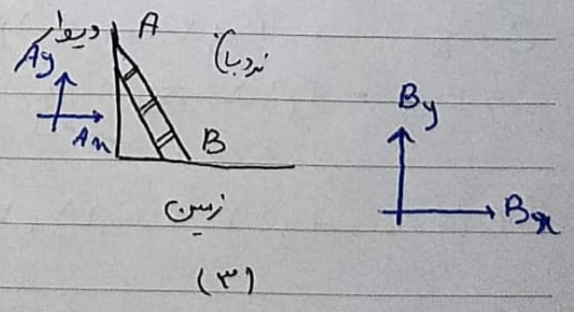


تمرین ۰ مطلوب است رسم نمودار سازه‌های زیر ؟





چون نمیتونه در این امتداد حرکت کنه ، عکس العمل نداره

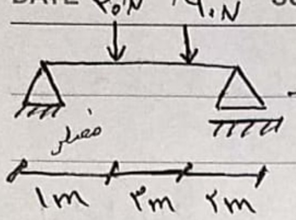


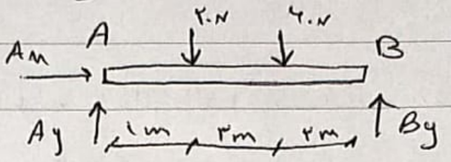
Sahand

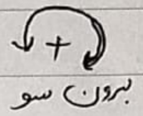
Scanned by CamScanner

DATE SUBJECT:

تمرین 8 مطلوب است تعیین عکس العمل های تکیه گاهی در تیر زیر؟







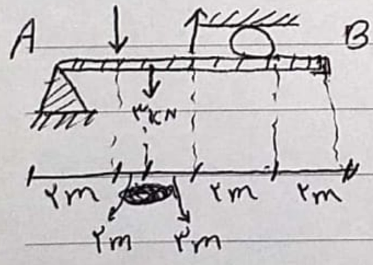
$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x = 0$

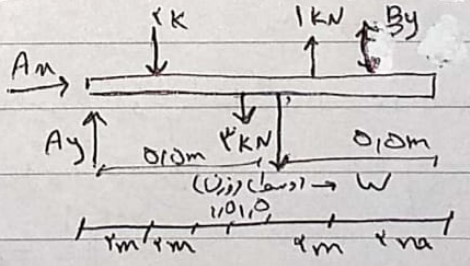
$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow (B_y \times 6) + (-60 \times 4) + (-20 \times 1) = 0 \longrightarrow B_y = 43.3$ ✓

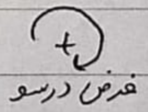
$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y + B_y - 20 - 60 = 0 \longrightarrow A_y = +36.7$ ✓

چون مثبت شد یعنی جهت را درست در نظر گرفتیم.

تمرین 8 مطلوب است تعیین عکس العمل های تکیه گاهی در تیر زیر به جرم 100kg؟







$W = mg = 100 \times 9.81 = 981\ N \longrightarrow 0.981\ kN$

$\Sigma M_A = 0 \longrightarrow B_y \times 9 + (-1)(7) + 0.98 \times 5.5 + 3 \times 4 + 2 \times 2 = 0$ (برخلاف سو ، وسط)

$\longrightarrow B_y = -3.15$ ☒ جهت B_y اشتباه شد $\longrightarrow B_y \uparrow$ برعکس

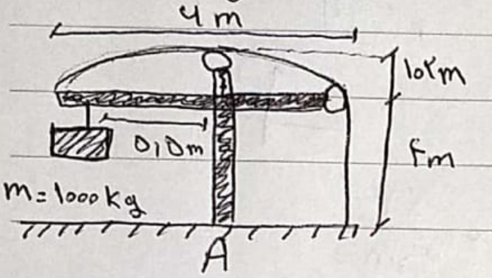
$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y - 2 - 3 - 0.98 + 1 + 3.15 = 0 \longrightarrow A_y = 1.83\ kN$

$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow A_x = 0$

Scanned by CamScanner

تمرین ۵: چنانچه از وزن قائم (قسمت قائم) جرثقیل در مقابل بخش افقی آن صرف نظر شود، مطلوب است:

تعیین عکس العمل های تکیه گاه A در صورتی که کشش کابل برابر $15\,kN$ و جرم بخش افقی برابر $1500\,kg$ باشد:



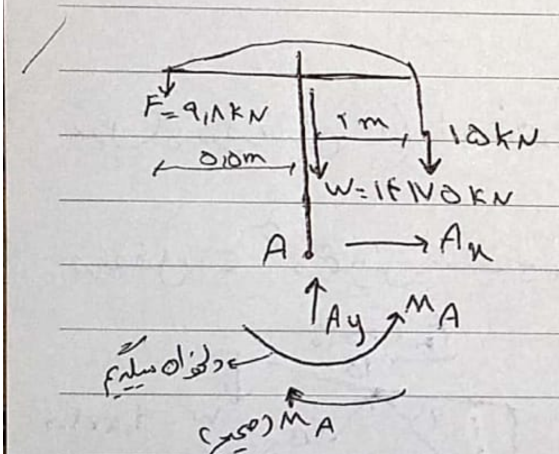
(جسم) $F = 1000 \times 9.81 = 9810 = 9.8\,kN$

$W = 1500 \times 9.81 = 14715\,kN$

$\sum F_x = 0 \longrightarrow A_x = 0$

$\sum F_y = 0 \longrightarrow A_y - 15 - 14.75 - 9.8 = 0$

$\longrightarrow A_y = 39.5\,kN$

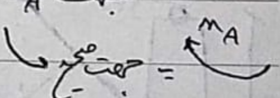


(شروع از A)

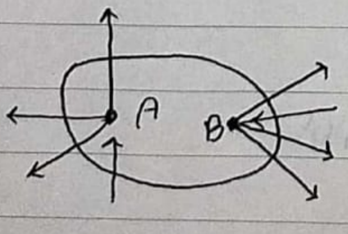
$\sum M_A = 0 \longrightarrow M_A + 9.8 \times 5.5 + 14.7 \times 2 - 15 \times 2 = 0$

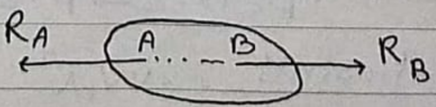
$M_A = -53.4\,kN.m$

جهت M_A رو فرض اشتباه گرفتیم



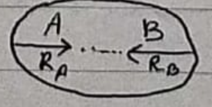
تعادل اجسام دو نیرویی: چنانچه کلیه نیروهای وارد بر جسم اعم از عکس العمل های تکیه گاهی غیر لنگری تنها از طریق دو نقطه جدا از هم بر جسم اثر نماید، جسم در تعادل است اگر و فقط اگر برایند نیروها در آن دو نقطه با یکدیگر برابر و در یک امتداد قرار گیرند.





دو نیروی کشش (T)

$R_B = R_A$



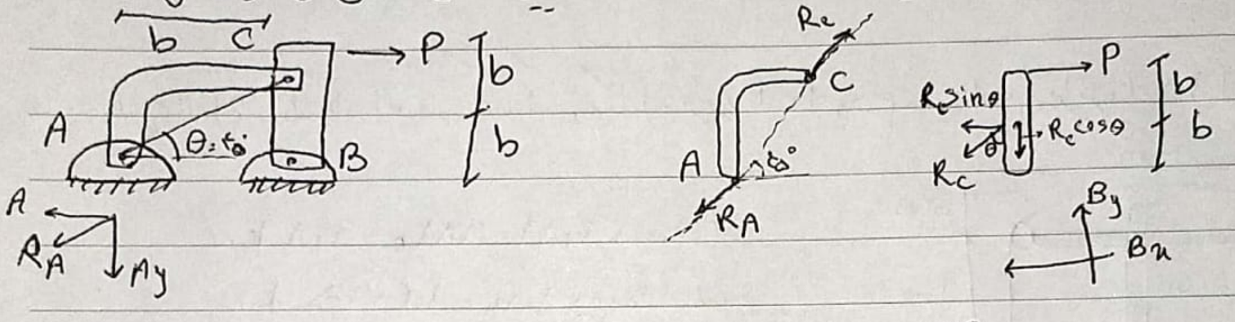
دو نیروی فشاری (C)

$R_A = R_B$

Scanned by CamScanner

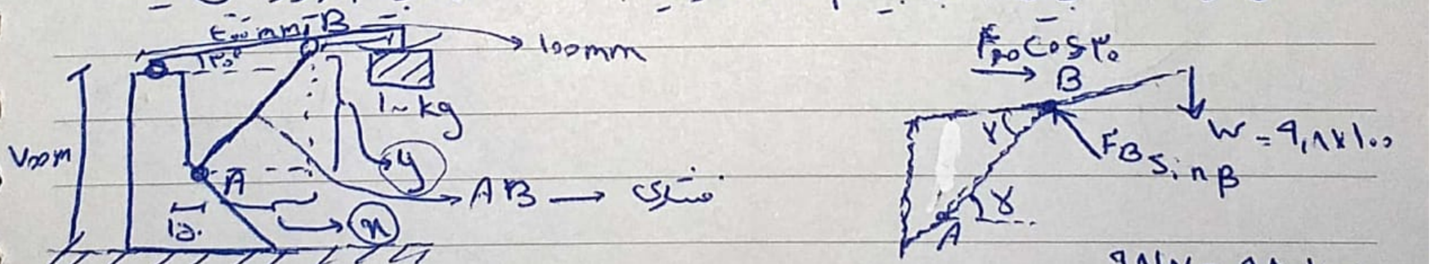
DATE / / SUBJECT:

تمرین ۸ چنانچه عضو AC دونیرویی باشد مطلوب است: تعیین عکس العمل های تکیه گاهی در A ؟



$$\Sigma M_B = 0 \rightarrow P \times 2b - R_c \sin\theta \times b = 0 \rightarrow R_c = \frac{2P}{\sin\theta}$$

تمرین ۹ در جرثقیل نشان داده شده در شکل زیر مطلوب است تعیین عکس العمل های تکیه گاهی در مفصل C ؟ و همچنین چنانچه پیستون AB دونیرویی باشد فشار در پیستون را تعیین کنید.



981 N = 0.98 kN

$$\Sigma M_C \rightarrow F_B \sin\beta \times 400 - W \times 1400 \cos 30 = 0 \rightarrow F_B = \frac{1400 \times W \times \cos 30}{400 \sin\beta}$$

$$\rightarrow = \frac{1400 \times 0.98 \times \cos 30}{400 \sin 47.68}$$

$$\beta = 30 - \gamma \rightarrow \beta = \gamma - 30 = 47.68$$

$$\tan\gamma = \frac{y}{x} = \frac{700 + 400 \sin 30}{400 \cos 30 - 150} = 77.8°$$

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow C_x + F_B \cos\gamma = 0 \rightarrow C_x = -\cos 77.68 \times (4.017) \rightarrow C_x = 0.855 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_y = 0 \rightarrow C_y + F_B \sin\gamma - W = 0 \rightarrow C_y = 0.98 \times 40 \rightarrow C_y = -2.94 \text{ kN}$$

فشار $= \frac{\text{نیرو}}{\text{سطح}} = \frac{-4.017}{\pi (80.1)^2 \times 0.25}$ ← قطر داخلی

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

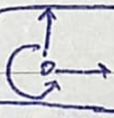
واکنش های تکیه گاهی در فضا : مشابه حالت دو بعدی رایج ترین تکیه گاه های سه بعدی عبارتند از :

۱. تکیه گاه غلتکی فضایی : نوعی از تکیه گاه است که تنها مانع حرکت جسم در امتداد عمود بر صفحه‌ی استقرار در جسم (تکیه گاه تک مجهولی با ۵ درجه آزادی)

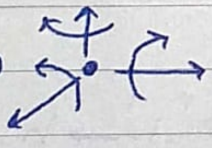
۲. تکیه گاه مفصل فضایی : نوعی از تکیه گاه است که مانع حرکت انتقالی جسم در سه امتداد متعامد میشود. (تکیه گاه سه مجهولی با ۳ درجه آزادی)

۳. تکیه گاه گیردار فضایی : نوعی از تکیه گاه است که هم مانع حرکت انتقالی و هم مانع چرخش جسم در کل تکیه گاه (مثال کتاب) حول سه محور متعامد میشود. (تکیه گاه ۶ مجهولی با صفر درجه آزادی جسم)

نکته : هر نقطه سه درجه آزادی دارد



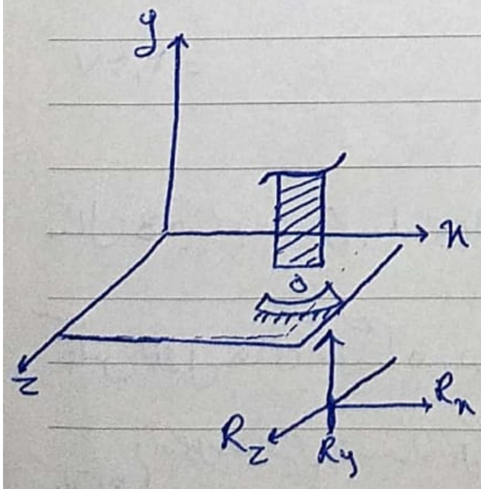
مثال : ⟸

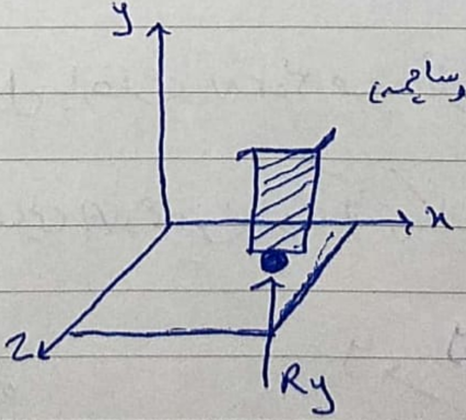


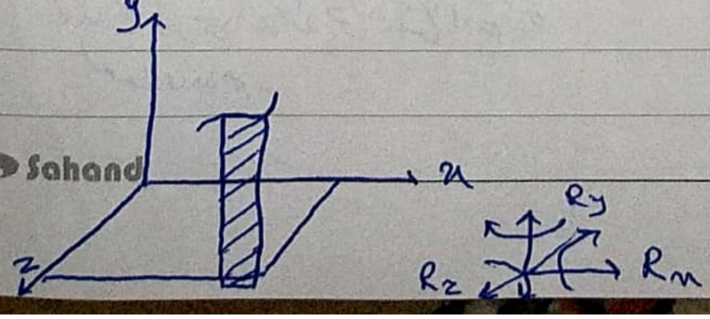
(۶ درجه آزادی)

اشکال انواع مفصل فضایی (تو کتاب هس)

مفصل فضایی (تماس و ساچمه)



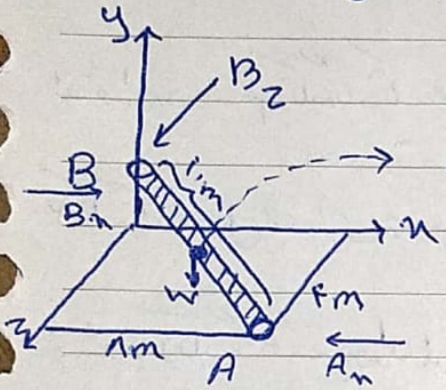




DATE / / SUBJECT:

مثال 8

میله‌ای فولادی به طول ۱۰ متر و به جرم 100kg مطابق شکل به ترتیب با مفاصل فضایی A و B به کف و دیوار متصل شده است. مطلوب است: تعیین عکس العمل های تکیه‌گاهی در مفاصل A و B، چنانچه B امکان حرکت در امتداد z را داشته باشد.



وزن میله $= W = mg = ۱۰۰ \times ۹٫۸۱ = ۰٫۹۸۱ \text{ kN}$

نکته: در مسائل فضایی باید محوری را انتخاب کنی که مختصات داشته باشه و هم محور مجزا و هم نقطه مجزا

$(\Sigma M_x)_A = 0 \qquad B_z \times h - (W \times 2) = 0 \longrightarrow B_z = \frac{2W}{h} = ?$

$(\Sigma M_z)_A = 0 \qquad -B_x \times h + (W \times 4) = 0 \longrightarrow B_x = 4W \times \frac{1}{h} = ?$

(حول محوری که تکیه‌گاه‌ها را قطع کرده)

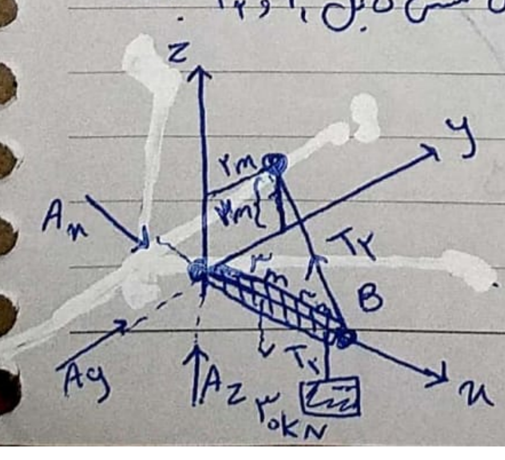
$\Sigma F_x = 0 \longrightarrow B_x - A_x \longrightarrow B_x = A_x$

$\Sigma F_y = 0 \longrightarrow A_y - W = 0 \longrightarrow A_y = W$

$\Sigma F_z = 0 \longrightarrow B_z - A_z = 0 \longrightarrow A_z = B_z$

$h^2 + 8^2 + 4^2 = 10^2 \longrightarrow h = \sqrt{10^2 - 8^2 - 4^2} = 4.47$

مثال 8 چنانچه از وزن میله‌ی AB در مقابل بار خارجی 30kN صرف نظر شود مطلوب است تعیین عکس العمل های تکیه‌گاهی در مفصل فضایی A و همچنین نیروی کشش کابل T_1 و T_2 ؟



نکات 8: اگر کابل دو سر سیم به جسم بود مثل فنر عمل کند
ΣM حول محور x نمی‌خواد چون همشون را قطع کرده
ممان موازی ها هم نه

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

T_{1x} T_{1y} T_{1z}

$\vec{T_2} = -T_2\vec{j}$ $\quad \vec{T_1} = T_1\lambda_{BC} = -0.94\,T_1\vec{i} + 0.18\,T_1\vec{j} + 0.28\,T_1\vec{k}$

$\lambda_{BC} = \dfrac{\vec{BC}}{|BC|} = -0.94\vec{i} + 0.18\vec{j} + 0.28\vec{k}$

$\rightarrow B(10,0,0),\ C(0,2,3)$

$\rightarrow BC = -10\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} \rightarrow |BC| = \sqrt{10^2+2^2+3^2} = 10.63$

$0.28T_1$

$\Sigma M_y = 0 \longrightarrow 30\times 5 - T_{1z}\times 10 = 0 \longrightarrow T_1 = \dfrac{150}{2.8} = 53.57\ kN$

$\Sigma M_z = 0 \longrightarrow T_{1y}\times 10 = T_2\times 8 = 0$ $\quad T_{1y} \rightarrow 0.18T_1$

$T_{1y}\times 10$

$T_2 = \dfrac{0.18\times 53.57\times 10}{8} \longrightarrow T_2 = 12.05\ kN$

$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x - T_x = 0 \rightarrow A_x = 0.98\times 53.57 = 50.35\ kN$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y - T_2 + T_{1y} = 0 \rightarrow A_y = 12.05 - 0.18\times 55.57 = 7.4\ kN = A_y$

$\Sigma F_z = 0 \longrightarrow A_z + T_{1z} - 30 = 0 \longrightarrow A_z = 30 - 0.28\times 53.57 \rightarrow A_z = 15\ kN$

فصل چهارم:

خواص یک جسم را میتوان به دو بخش خواص مادی و هندسی تقسیم نمود. خواص مادی به بررسی و اثر جنس مصالح میپردازد و موضوعی است که در مقاومت مصالح بررسی میشود. هدف از این بخش بررسی خواص هندسی اجسام میباشد. بطور کلی خواص هندسی اجسام را میتوان به چند دسته ی زیر طبقه بندی نمود:

۱- مرکز ثقل ۲- مرکز جرم ۳- مرکز سطح ۴- لنگر اول سطح (ممان استاتیک)

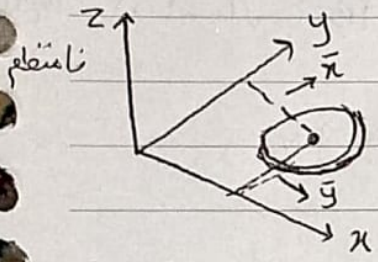
۵- لنگر دوم سطح (ممان اینرسی) ۶- بحث نیروهای گسترده

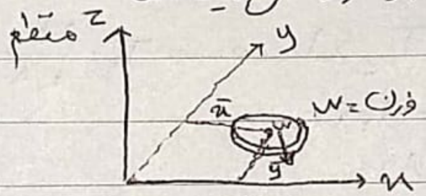
Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مرکز ثقل G با توجه به اینکه نیروی وزن یک نیروی گسترده ی جمعی است، لذا بر روی کل حجم بصورت اجزای جمعی توزیع شده است. ما میخواهیم نقطه ای را درون جسم پیدا کنیم که برایند تمام نیروهای وزنی از آن نقطه عبور میکند. این نقطه را مرکز ثقل مینامند.





مجموع گشتاورهای dw ها حول محورهای x یا y = گشتاور w حول محور x یا y

نامنظم

$\int_v \bar{y}_i \, dw = w.\bar{y}$ $\xrightarrow{\text{شکل نامنظم}}$ $\bar{y} = \frac{\int_v \bar{y}_i . dw}{w}$

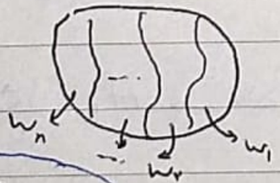
$\bar{y} = \frac{\int_v y_i \, dw}{\int_v dw}$

$\int_v x_i \, dw = w.\bar{x}$ $\xrightarrow{\text{نامنظم}}$ $\bar{x} = \frac{\int_v x_i \, dw}{w}$

$\bar{x} = \frac{\int_v x_i \, dw}{\int_v dw}$

انتگرال

منتظم



به قسمت هایی تقسیم میکنیم که مرکز ثقل آن ها را میدانیم

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$ $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i . w_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$

n : تعداد قطعه ها

$\bar{x}_i$ = فاصله مرکز ثقل هر قطعه تا محورها w_i = وزن هر قطعه

$\bar{y}_i$ " " " " " ها

مرکز جرم G (الف) به سادگی میتوان با استفاده از تعاریف وزن و چگالی روابط مرکز ثقل را به روابط مرکز جرم مطابق زیر تبدیل نمود:

$w = mg \to w = \rho v g$ ، چگالی $\rho = \frac{m}{v}$

$\xrightarrow{\text{مشتق از طرفین}}$ $dw = \rho g \, dv$ $\xrightarrow{\text{اشکال نامنظم}}$

$\bar{x} = \frac{\int_v \bar{x}_i \, dv}{\int_v dv}$ ----→ $\bar{x} = \frac{\int_v \bar{x}_i \rho g \, dv}{\int_v \rho g \, dv}$

$\bar{y} = \frac{\int_v \bar{y}_i \, dv}{\int_v dv}$ ----→ — — —

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مرکز جرم اجسام منظم : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$ ✓ ، $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$ ✓

n : تعداد قطعات

$\bar{x}_i$: فاصله مرکز از نقطه‌ی i ام تا محور x ها ، $\bar{y}_i$: فاصله مرکز از نقطه‌ی i ام تا محور y ها

* مرکز سطح : چنانچه جسم مورد نظر دارای ضخامت یکسان در پیرامون خود باشد آنگاه می‌توان حجم جسم را از حاصلضرب ضخامت در سطح تعیین نمود. بنابراین برای مرکز سطح با استفاده از روابط مرکز جرم داریم :

$v = t \cdot A$ (حجم = ضخامت × سطح)

نامنظم : $\bar{x} = \frac{\int_v x_i\, dv}{\int_v dv} = \frac{\int_A \bar{x}_i\, t\, dA}{\int_A t \cdot dA} = \frac{\int_A \bar{x}_i\, dA}{\int_A dA} = \bar{x}$ ✓

$\bar{y} = \frac{\int_A \bar{y}_i\, dA}{\int_A dA}$ ✓

dA : مساحت جزء سطح مورد نظر ، x_i : فاصله مرکز سطح جزء مورد نظر تا محور y ها

y_i : 〃 〃 〃 〃 〃 x ها

مرکز سطح اجسام منظم : $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$ و $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$

A_i : مساحت قطعه‌ی i ام

n : تعداد قطعات

$\bar{x}, \bar{y}$: مرکز سطح

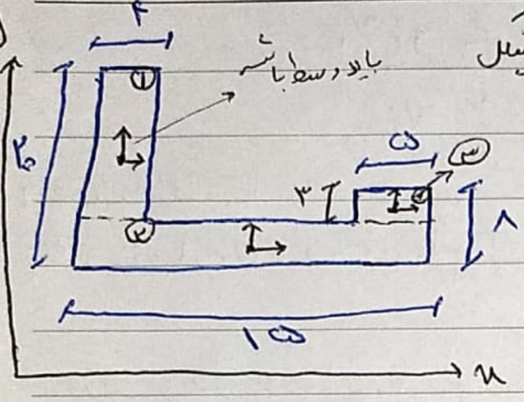
x_i : فاصله مرکز سطح جسم مورد نظر i ام تا محور y ها

y_i : فاصله مرکز سطح جسم مورد نظر i ام تا محور x ها

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثال: مطلوب است تعیین مرکز سطح شکل زیر: تقسیم بندی شکل



در محورهای مختصات جایی رو میگیریم که سطوح مثبت باشند.

$\bar{x}_1 = \frac{۴}{۲} = ۲$ $\bar{y}_1 = \frac{۱۷}{۲} + ۳$ $A_1 = ۴ \times ۱۷$

$\bar{x}_2 = ۷/۵$ $\bar{y}_2 = ۱/۵$ $A_2 = ۱۵ \times ۳$

$\bar{x}_3 = ۱۲/۵$ $\bar{y}_3 = ۵/۵$ $A_3 = ۵ \times ۵$

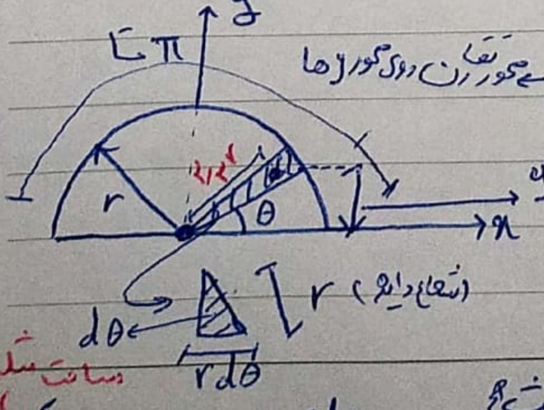
$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{۳} \bar{x}_i A_i}{\sum_{i=1}^{۳} A_i} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 + \bar{x}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{۳} \bar{y}_i A_i}{\sum_{i=1}^{۳} A_i} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 + \bar{y}_3 A_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

تعریف محور تقارن: محوری را محور تقارن مینامند که به ازای جز سطح D_A به فاصله x از محور یک جز سطح D_A' موجود باشد که دارای فاصله (x-) تا آن محور است.

تعریف مرکز تقارن: نقطه‌ای مانند O را مرکز تقارن مینامند بطوریکه به ازای هر جز سطح D_A به مختصات x و y یک جز سطح D_A' موجود باشد که دارای مختصات x- و y- باشد.

نکته ۱: چنانچه جسمی دارای محور تقارن باشد مرکز سطح روی آن محور واقع میشود.

نکته ۲: چنانچه جسمی دارای مرکز تقارن بود، آن نقطه همان مرکز هندسی است.



مثال: مطلوب است مرکز سطح شکل زیر:

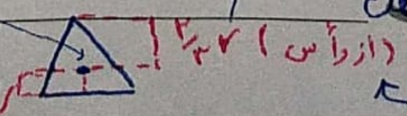
dA: مساحت جز سطح

$\bar{y}_i$: فاصله مرکز سطح جز سطح از محور x ها

مساحت مثلث

$S_{مثلث} = \frac{۱}{۲}\, r \cdot r d\theta$

مرکز ثقل مثلث: ⇐



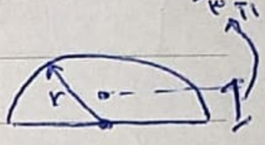
Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

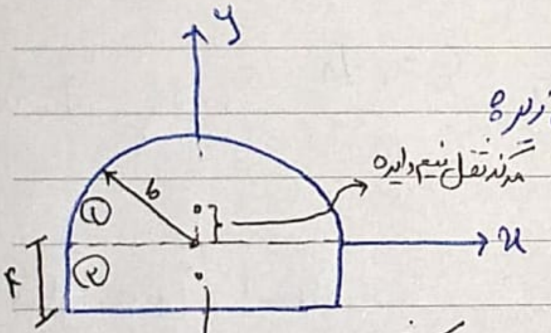
$$\bar{y} = \frac{\int_0^{\pi} \frac{2}{3} r \sin\theta \cdot \frac{1}{2} r^2 d\theta}{\int_0^{\pi} \frac{1}{2} r^2 d\theta} = \frac{\frac{r^3}{3} \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta}{\frac{1}{2} r^2 \int_0^{\pi} d\theta}$$

مرکز ثقل نیم دایره از مرکز

$$\bar{y} = \frac{\frac{r^3}{3} (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}}{\frac{1}{2} r^2 \cdot \theta \Big|_0^{\pi}} = \frac{\frac{r^3}{3} (2)}{\frac{1}{2} r^2 \cdot \pi} \xrightarrow[\text{نهایی}]{\text{فرمول}} \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$



مثال: مطلوب است تعیین مختصات مرکز سطح شکل زیر؟



مرکز ثقل نیم دایره → $\frac{4r}{3\pi} = \frac{40}{3\pi}$ ($r = 10$)

$\bar{x} = 0$ ← چون محور تقارن روی محور y هاست

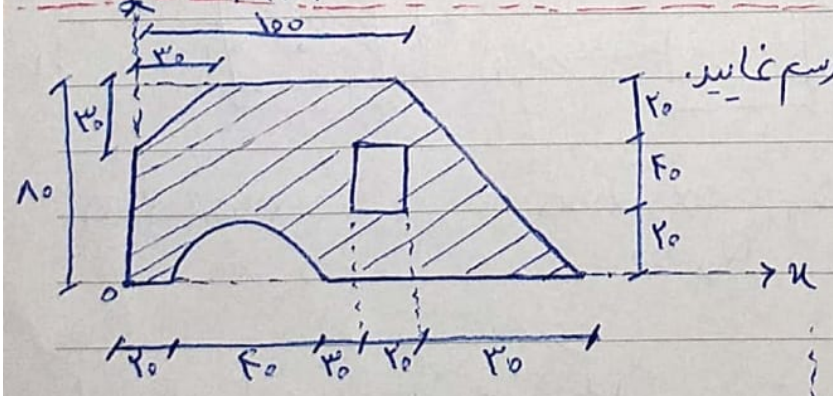
$\bar{y}_1 = 4 \times \frac{10}{3\pi}$ $\quad A_1 = \pi \times \frac{10^2}{2}$

$\bar{y}_2 = -2$ (زیر محور x) $\quad A_2 = 4 \times 20$

جایگذاری

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2}{A_1 + A_2}$$

مثال: مختصات مرکز سطح شکل زیر را رسم نمایید.

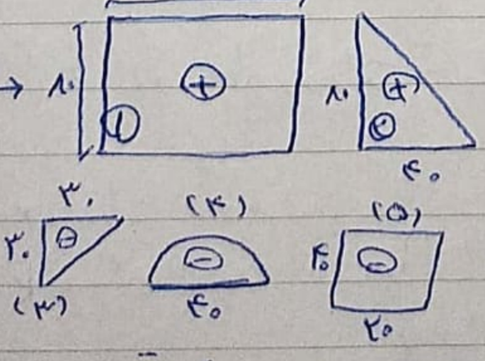


حل: فضاهای خالی رو پر میکنیم شبیه ذوزنقه بشه بعدش ازش کم میکنیم

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 A_1 + \bar{x}_2 A_2 - \bar{x}_3 A_3 - \bar{x}_4 A_4 - \bar{x}_5 A_5}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5}$$

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 + \bar{y}_2 A_2 - \bar{y}_3 A_3 - \bar{y}_4 A_4 - \bar{y}_5 A_5}{A_1 + A_2 - A_3 - A_4 - A_5}$$

تجزیه شکل →



اینا رو جمع میبندیم

اینا رو ازش کم میکنیم

$\bar{x}_1 = 50$ $\quad \bar{y}_1 = 40$ $\quad A_1 = 100 \times 80$

$\bar{x}_2 = 100 + \frac{40}{3}$ $\quad \bar{y}_2 = \frac{80}{3}$ $\quad A_2 = 80 \times \frac{40}{2}$

$\bar{x}_3 = \frac{1}{3} 30$ $\quad \bar{y}_3 = 50 + \frac{2}{3} 30$ $\quad A_3 = 30 \times 30 \times \frac{1}{2}$

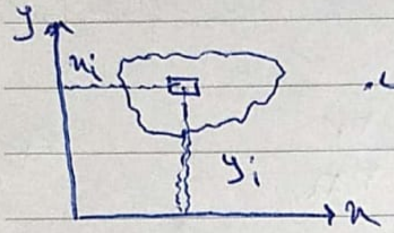
$\bar{x}_4 = 40$ $\quad \bar{y}_4 = 4 \times \frac{20}{3\pi}$ $\quad A_4 = \frac{\pi (20)^2}{2}$

$\bar{x}_5 = 100$ $\quad \bar{y}_5 = 50$ $\quad A_5 = 20 \times 40$

Sahand

Scanned by CamScanner

گشتاور اول سطح (ممان) استاتیک: طبق تعریف، گشتاور اول سطح نسبت به محورهای x و y برابر است با مجموع حاصلضرب جزء سطح D_A در فاصله آن تا محورهاست.

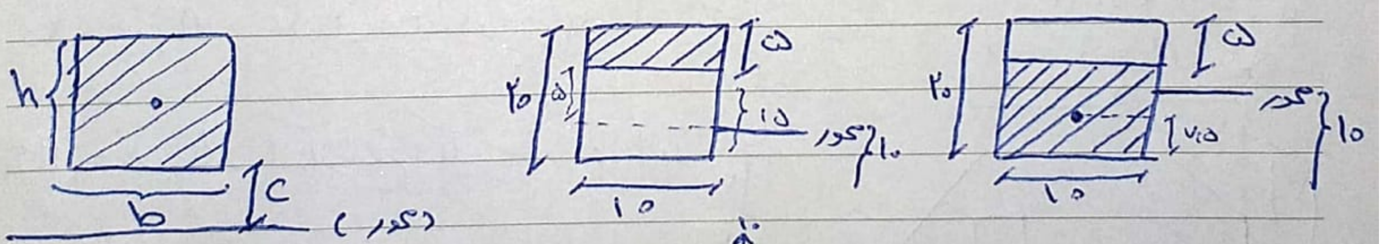


$$\bar{y} = \frac{\int_A y_i \, dA}{\int_A dA} \rightarrow Q_x = A \cdot \bar{y}$$

ممان استاتیک محورها $Q_R = \int_A \bar{y}_i \, dA$

$$\bar{x} = \frac{\int_A x_i \, dA}{\int_A dA} \rightarrow Q_y = A \cdot \bar{x}$$

مثال ۸) ممان استاتیک سطوح هاشور شده را نسبت به محورهای نشان داده شده تعیین نمایید.



$Q_{محور} = (bh)(\frac{h}{2} + c)$

$Q_{\bar{x}} = 5 \times b^{10} \times 7.5$

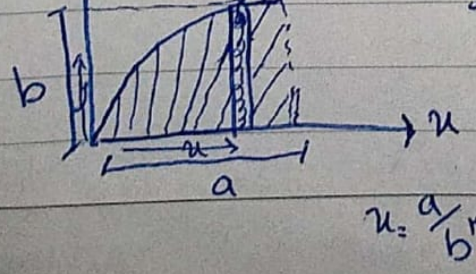
$Q_x = 0A$

$Q_{\bar{x}} = 10 \times 15(-2.5)$

$Q_x = -A$

نکته: قدر مطلق ممان استاتیک سطوح مکمل نسبت به محورهای مرکز سطح با هم برابرند.

سوال ۸) ممان استاتیک سطح زیر را نسبت به محورهای x و y تعیین نمایید. همچنین مختصات مرکز سطح شکل زیر را بدست آورید.



$$\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \rightarrow a = kb^3 \rightarrow k = \frac{a}{b^3}$$

$$x = \frac{a}{b^3} \cdot y^3 \rightarrow y^3 = \frac{x \cdot b^3}{a} \rightarrow y = b \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_A \bar{x}_i \, dA}{\int_A dA} = \frac{Q_y}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int_A \bar{y}_i \, dA}{\int_A dA} = \frac{Q_x}{A}$$

$$A = \int_A dA \quad , \quad dA = y\,dx \longrightarrow A = \int_0^a y\,dx \longrightarrow A = \int_0^a b\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} dx$$

$$\longrightarrow A = \frac{b}{a^{1/3}} \int_0^a x^{1/3}\,dx \qquad A = \frac{b}{a^{1/3}} \cdot \frac{3}{4} x^{4/3} \Big]_0^a \longrightarrow A = \frac{3}{4} ab$$

$$Q_y = \int_A x_i \, dA$$

$\bar{x}_i$: فاصله‌ی مرکز سطح جزء سطح مورد نظر تا محور yها

$$\bar{x}_i = x + \frac{dx}{2} = x \qquad Q_y = \int_0^a x \cdot y\,dx \longrightarrow Q_y = \int_0^a x \cdot (b)\left(\frac{x}{a}\right)^{1/3} dx$$

$$\longrightarrow Q_y = \frac{b}{a^{1/3}} \int_0^a x^{4/3}\,dx \longrightarrow Q_y = \frac{b}{a^{1/3}} \cdot \frac{3}{7} x^{7/3} \Big]_0^a \longrightarrow Q_y = \frac{3}{7} a^2 \cdot b$$

$\bar{y}_i$: فاصله‌ی مرکز سطح جزء سطح مورد نظر تا محور xها

$$Q_x = \int_A y_i \, dA$$

$$\bar{y}_i = \frac{y}{2} \longrightarrow Q_x = \int_0^a \frac{y}{2} \cdot y\,dx \longrightarrow Q_x = \frac{1}{2} \int_0^a b^2 \left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} dx$$

$$Q_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^{2/3}} \cdot \int_0^a x^{2/3}\,dx \longrightarrow Q_x = \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{a^{2/3}} \cdot \frac{3}{5} \cdot x^{5/3} \Big]_0^a$$

$$\longrightarrow Q_x = \frac{3}{10} ab^2$$

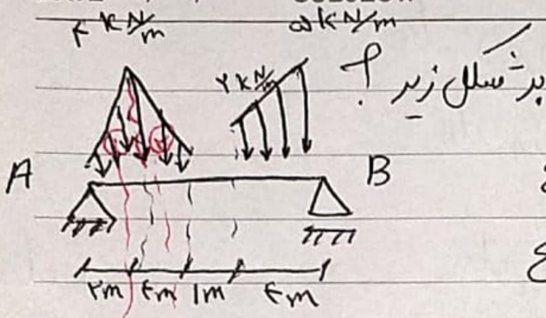
$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\frac{3}{7} a^2 b}{\frac{3}{4} ab} \longrightarrow \bar{x} = \frac{4}{7} a$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\frac{3}{10} ab^2}{\frac{3}{4} ab} \longrightarrow \bar{y} = \frac{2}{5} b$$

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثال: مطلوب است تعیین عکس العمل های تکیه گاهی بر شکل زیر ؟



$\Sigma F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

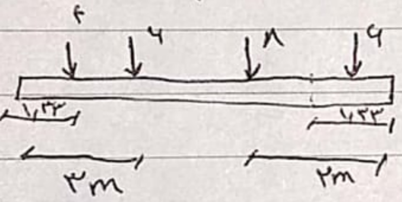
$\Sigma M_A = 0 \rightarrow B_y \times 10 - 4 \times 1.0 \times 1.33 - 6 \times 3 - 8 \times 8$

$- 6 \times (10 - 1.33) = 0 \rightarrow B_y = ?$

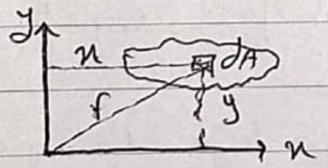
① $\rightarrow \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = 1.33m$

② $\rightarrow \frac{1}{3} \times 3 = 1m$

$\Sigma F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y = 4 + 6 + 8 + 6 \rightarrow A_y = ?$



ممان اینرسی (گشتاور دوم سطح): طبق تعریف ممان اینرسی حول محور y و x از روابط زیر بدست می آید:



ممان اینرسی حول محورها $\rightarrow I_{xx} = \int_A y^2 dA$

ممان اینرسی حول محور ها $: I_{yy} = \int_A x^2 dA$

ممان اینرسی حاصلضرب $: I_{xy} = \int_A xy \, dA$

ممان اینرسی قطبی $: I_z = J = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA$

$= I_{xx} + I_{yy}$

نکته ۱: ممان اینرسی حول محورهای x و y مثبت هستند

نکته ۲: ممان اینرسی حاصل ضرب میتواند مثبت منفی یا صفر باشد.

نکته ۳: واحد ممان اینرسی واحد طول به توان ۴

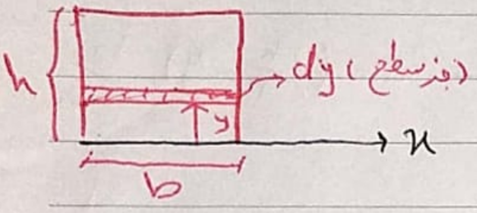
نکته ۴: واحد ممان اینرسی همواره با توان سوم ضلعی که بر محور اینرسی عمود است رابطه داره

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

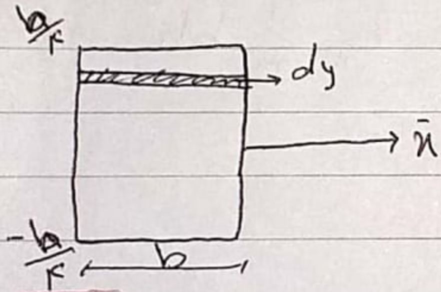
صما) اینرسی سطوح هاشور شده نسبت به محورهای نشان داده شده تعیین کنید



$dA = b \cdot dy \qquad I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \cdot b \cdot dy$

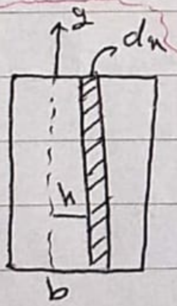
$\rightarrow I_x = b \rightarrow I_x = b \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$

سؤال 8صما) سؤال قبل با شکل دیگر نسبت به $\bar{x}$؟



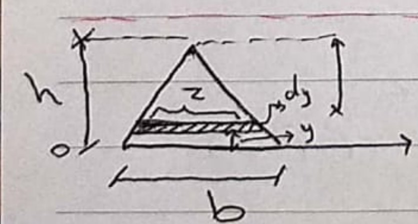
$dA = b \cdot dy \rightarrow I_x = \int_{-h/4}^{h/4} y^2 \cdot b \cdot dy$

$\rightarrow I_{\bar{x}} = b \cdot \frac{y^3}{3}\Big|_{-h/4}^{h/4} \longrightarrow I_x = \frac{1}{12} bh^3$ *



$dA = h \cdot dx \qquad I_{\bar{y}} = \int x^2 dA \longrightarrow I_{\bar{y}} = \int_{-b/2}^{b/2} x^2 h\, dx$

$\longrightarrow I_{\bar{y}} = h\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-b/2}^{b/2} \longrightarrow I_{\bar{y}} = \frac{1}{12}\, h b^3$



$h-y \qquad$ (تالس) $\frac{b}{h} = \frac{z}{h-y} \longrightarrow z = \frac{b(h-y)}{h}$

$dA = z \cdot dy = \frac{b}{h}(h-y)\,dy$

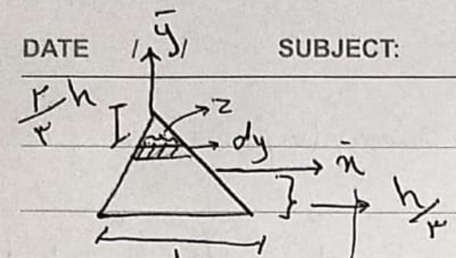
$\longrightarrow I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y)\,dy$

$\longrightarrow I_x = \frac{b}{h}\int_0^h (hy^2 - y^3)\,dy = \frac{1}{12} bh^3$

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:



$$dA = z \cdot dy$$

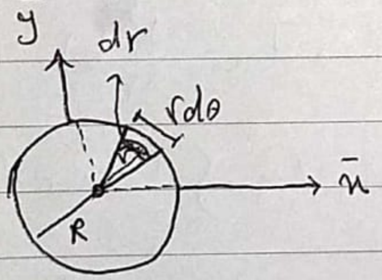
$$\longrightarrow \frac{z}{\frac{2h}{3} - y} = \frac{b}{h} \longrightarrow z = \left(\frac{2h}{3} - y\right) \cdot \frac{b}{h}$$

نسبت به محور x ها پس دامنه از $-\frac{h}{3}$ (چون زیر محور x هاست.)

$$I_x = \int_A y^2 \, dA$$

$$\longrightarrow \int_{-h/3}^{2h/3} y^2 \cdot \left(\frac{2h}{3} - y\right) \frac{b}{h} \, dy \longrightarrow I_{\bar{x}} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$\xrightarrow{2 \times \frac{1}{12} \times h \left(\frac{b}{2}\right)^3} I_{\bar{y}} = \frac{1}{48} h b^3$$



مثال) اینرسی دایره :

$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{y}}$$

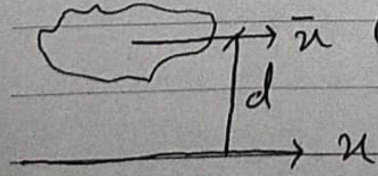
$$J = I_{\bar{x}} + I_{\bar{y}} \qquad J = 2 I_{\bar{x}}$$

$$\longrightarrow I_{\bar{x}} = I_{\bar{y}} = \frac{J}{2} = \frac{\pi R^4}{4}$$

$$J = \int_A r^2 \, dA \qquad dA = r d\theta \cdot dr \qquad J = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r \, d\theta$$

$$\longrightarrow J = \frac{R^4}{4} (2\pi) = \frac{\pi R^4}{2}$$

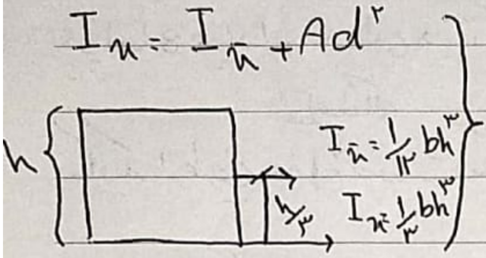
قضیه‌ی ~~[illegible]~~ انتقال محورهای موازی : چنانچه ممان اینرسی یک سطح را نسبت به محورهای مرکز سطح بدانیم میتوان ممان اینرسی سطح مذکور را نسبت به هر محور دلخواه دیگری که موازی محورهای مرکز سطح است، از رابطه‌ی زیر تعیین نمایید.



Sahand

DATE / / SUBJECT:

$$I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2$$



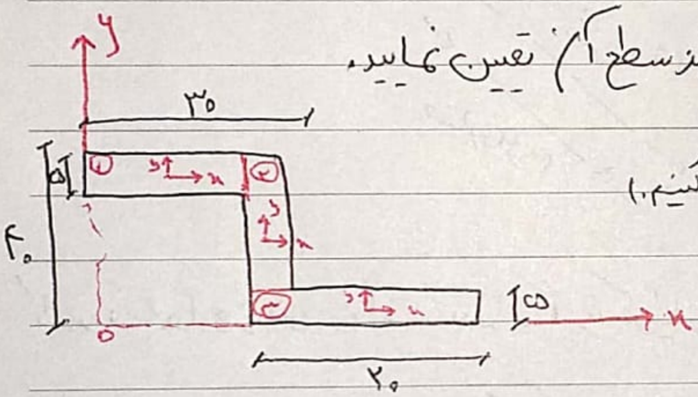
مساوی $\rightarrow \frac{1}{3}bh^3 = I_x = I_{\bar{x}} + Ad^2$

$$\rightarrow \underbrace{\frac{1}{12}bh^3}_{I_{\bar{x}}} + \underbrace{bh}_{A}\underbrace{\left(\frac{h}{2}\right)^2}_{d}$$

مثال ۵

مثال ۱) اینرسی سطح زیر را نسبت به محورهای مرکز سطح آن تعیین نمایید.

نکته ۵) اول باید مرکز سطح رو بدست بیاریم بعد نسبت به او حساب کنیم.



$$\bar{x} = \frac{30\times5\times15 + 30\times5\times27.5 + 20\times5\times35}{5\times30 + 30\times5 + 20\times5} = ?$$

$$\bar{y} = \frac{30\times5\times27.5 + 30\times5\times20 + 20\times5\times25}{5\times30 + 30\times5 + 20\times5} = ?$$

$$I_{\bar{x}} = I_{\bar{x}_1} + I_{\bar{x}_2} + I_{\bar{x}_3}$$

$$I_{\bar{x}} = \underbrace{\frac{1}{12}\times30\times5^3}_{I_{\bar{x}}} + 30\times5\times\underbrace{(27.5-\bar{y})^2}_{d^2} + \frac{1}{12}5\times30^3 + 5\times30\times(20-\bar{y})^2$$

$$+ \frac{1}{12}20\times5^3 + 20\times5\times(\bar{y}-25)^2$$

$$I_{\bar{y}} = I_{\bar{y}_1} + I_{\bar{y}_2} + I_{\bar{y}_3}$$

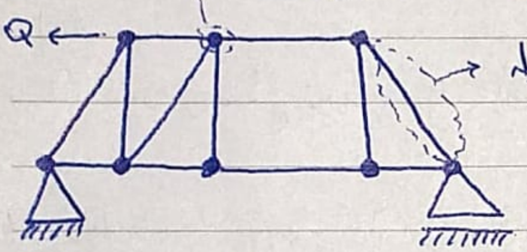
$$I_{\bar{y}} = \frac{1}{12}5\times30^3 + 5\times30\times(\bar{x}-15)^2 + \frac{1}{12}30\times5^3 + 30\times5\times(27.5-\bar{x})^2$$

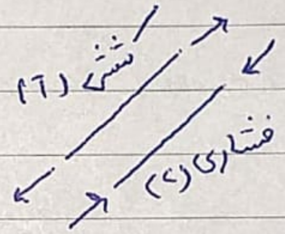
$$+ \frac{1}{12}5\times20^3 + 5\times20\times(35-\bar{x})^2$$

Scanned by CamScanner

فصل پنجم :

خرپاها : خرپاها سازه‌هایی هستند که از یکسری اعضای دونیرویی به نام میله تشکیل یافته اند. اتصال میله ها به یکدیگر از طریق مفصل (غیر اصطکاکی) صورت میگیرد. باتوجه به اینکه اعضای میله ای خرپاها اعضای ظریفی هستند قادر به تحمل لنگر نبوده [crossed out] بنابراین عموما بارها به گره های این سازه ها وارد میشوند.



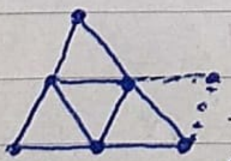


کاربرد خرپاها : زمانی مورد استفاده قرار میگیرند که نیاز به سازه هایی با وزن کم و (قادر به تحمل) نیروی زیاد باشند.

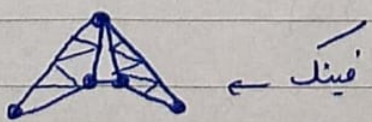
اسامی خرپاها : خرپاها باتوجه به شکلی که دارند از اسامی خاصی نیز بهره مند میشوند. فینک - پرات ها و ... بالتیمور

انواع خرپاها : خرپاها را میتوان به سه نوع تقسیم بندی کرد :

۱ـ خرپای ساده : نوعی از خرپا است که از یک عدد مثلث پایه تشکیل شده است و رشد این خرپا با اضافه کردن ۱ گره و ۲ میله صورت میگیرد.



۲ـ خرپای مرکب : نوعی از خرپا میباشد که از ترکیب چند خرپای ساده با یکدیگر بدست می آید.



۳ـ خرپای پیچیده (سهم - پنج رنج) :

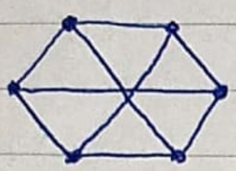
نوعی از خرپا هست که جز هیچکدام از خرپای ساده و مرکب نبوده ولی این

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

به ۲) یعنی نیست که برای تحلیل این خرپاها به معادلات دیگری به غیر از معادلات تعادل نیاز باشد

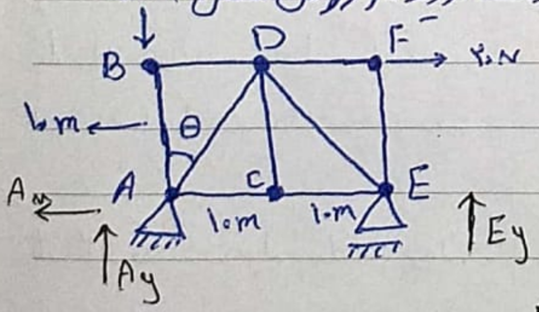


تحلیل خرپاها: بطور کلی برای تحلیل خرپاها دو روش پیشنهاد میشود: ۱- روش مفصل ۲- روش مقطع

روش مفصل: زمانی مورد استفاده قرار میگیرد که هدف تعیین نیروی کلیه ی اعضای خرپا مد نظر باشد.

برای این روش پس از تعیین عکس العمل های تکیه گاهی یک به یک مفصل ها را در نظر میگیریم و به جای میله های متصل به مفصل، نیروهای مجهول (درها) اعمال قرار میگیرد. سپس با برقراری معادلات تعادل ذرات دوبعدی ($\Sigma F_x=0$ و $\Sigma F_y=0$) برای کلیه مفاصل به تعیین نیروهای مجهول در میله میپردازیم

مثال: نیروهای داخلی در کلیه اعضای خرپای زیر را بدست آورید. (روش مفصل)



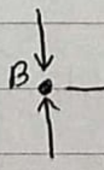
$\Sigma F_x=0 \longrightarrow A_x=20\,N$

$\Sigma M_A=0 \longrightarrow E_y\times 20-20\times 10=0 \longrightarrow E_y=10\,N$

$\Sigma F_y=0 \longrightarrow A_y+E_y-50=0 \longrightarrow A_y=40\,N$

از جایی شروع میکنیم که کمترین میله از ش عبور کرده و در اینجا B یا F

۱) فرض میکنیم در گره B فشاری است

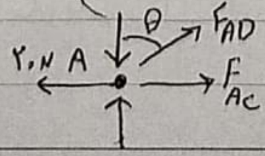


$\Longrightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \longrightarrow F_{AD}=0 \\ \Sigma F_y=0 \longrightarrow F_{AB}=50 \end{cases}$

مثبت شد یعنی فرض صحیح است و در B فشاری است.

از طرف B است ← فشاری

۲) فرض میکنیم در گره A کششی است



$\longrightarrow \theta=45^\circ \xrightarrow{\text{چون}} \tan 45=1 \longrightarrow \frac{10m\ (\text{مقابل})}{10m\ (\text{مجاور})}=1$

$\Sigma F_y=0 \longrightarrow 40-50+F_{AD}\cos\theta=0 \longrightarrow F_{AD}=\frac{10}{\cos\theta}=14.14 \longrightarrow$ A کششی

$\Sigma F_x=0 \longrightarrow F_{AC}+F_{AD}\sin\theta-20=0 \longrightarrow F_{AC}=10\,(N)$

مثبت شد پس فرض درست در A کششی است (T)

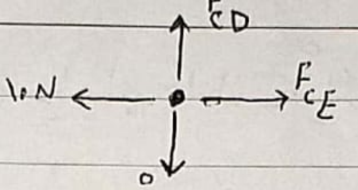
Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

مثبت شد یعنی در نتیجه کششی است.

۳) فرض میکنیم در گره C کششی است

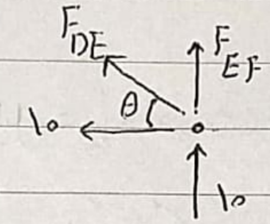


$\sum F_x=0 \to F_{CE}=10$ ✓

$\sum F_y=0 \to F_{CD}=0$

مثبت شد پس فرض درست است.

۴) فرض میکنیم در گره E فشاری است



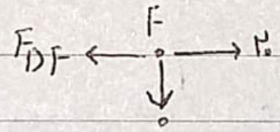
$\sum F_x=0 \to F_{DE}\cos\theta - 10 = 0$

$\to F_{DE}=\frac{10}{\cos\theta}=14.14\ N$

$\sum F_y=0 \to 10+F_{EF}-F_{DF}\sin\theta=0$

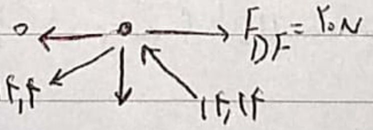
$\to F_{EF}=0$

۵) فرض میکنیم در گره F کششی است



$\sum F_x=0 \to F_{DF}=20\ N$ مثبت شد فرض درست است

۶) در گره D کنترل است



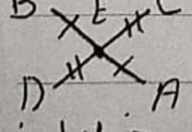
$\sum F_x=0 \quad , \quad \sum F_y=0$

نکته ۱: هرگاه سه میله به یک گره برسد بطوریکه دوتا از میله ها در یک امتداد باشند نیروی میله ی سوم صفر است، مانند گره E از شکل فوق

نکته ۲: هرگاه دو میله به یک گره برسد و در آن گره نیروی دیگری موجود نباشد و دو میله نیز در یک امتداد نباشند نیروی هر دو میله صفر است. مانند گره های B و F بدون نیرو.

در یک امتداد

نکته ۳: هرگاه ۴ میله به یک گره برسد که میله ها دو به دو در یک امتداد باشند، نیروی میله های ممتد با یکدیگر برابر است.



A=B , C=D

۲. روش مقطع: این روش زمانی مورد استفاده قرار میگیرد که هدف تعیین نیروی برخی از اعضای خرپا مدنظر باشد.

Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

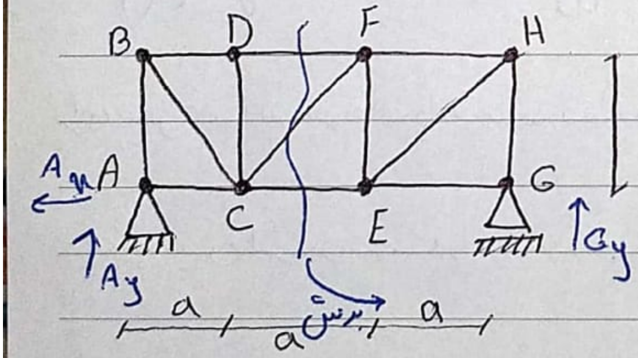
براساس این روش و پس از تعیین عکس العمل های تکیه گاهی باید برش فرضی خرپای داده شده را به دو قسمت تقسیم میکنیم و بر روی هریک از قسمت ها به جای میله های برش شده، نیروهای مجهولی (درها) استاد قرار میگیرد سپس با برقراری معادلات تعادل در صفحه ($\sum F_x=0$, $\sum F_y=0$ و $\sum M=0$) به تعیین نیروهای مجهول میپردازیم.

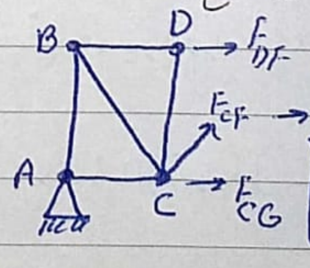
نکته ۱: برش فرض شده بایستی حتما خرپا را به دو قسمت تقسیم کند.

نکته ۲: برش فرض شده بایستی حداقل سه عضو را قطع کند.

نکته ۳: جهت تبدیل سریع تر یک سازه میتوان از ترکیب دو روش مفصل و مقطع استفاده میکنیم.

مثال: F_{DF} ؟ (روش مقطع)



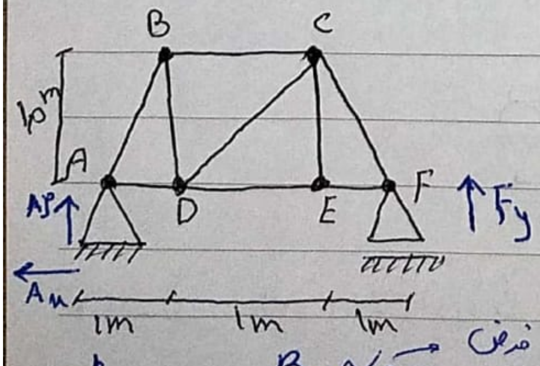


$\sum F_x=0$

$\sum F_y=0$

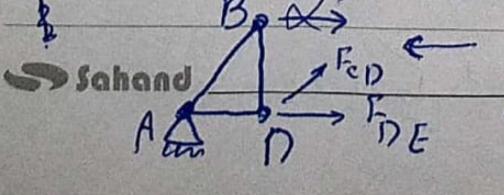
$\sum M_C=0$

مثال: نیروی عضو نشان داده شده ی زیر را بدست آورید. F_{BC} ؟



$\sum M_A=0 \to F_y\times 3-50\times 1=0$

$\to F_y=\frac{50}{3}=16.67$



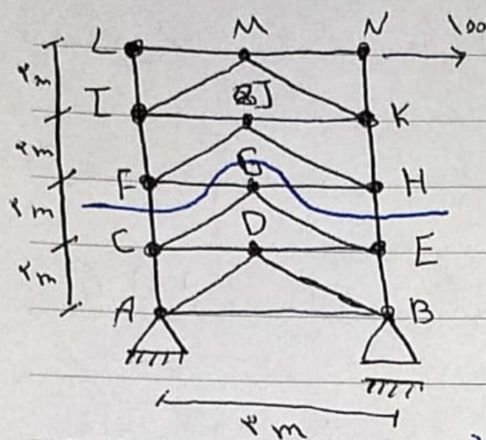
$\sum F_y=0 \to A_y+F_y-50=0 \to A_y=33.33N$

$\sum M_D=0 \to 33.33\times 1+F_{BC}\times 1.5=0$

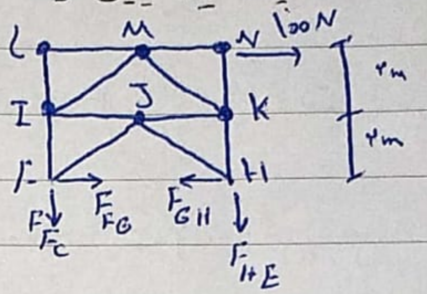
$F_{BC}=-\frac{33.33}{1.5}$

منفی شد، فرض کردیم کشش است ولی فشاری شد

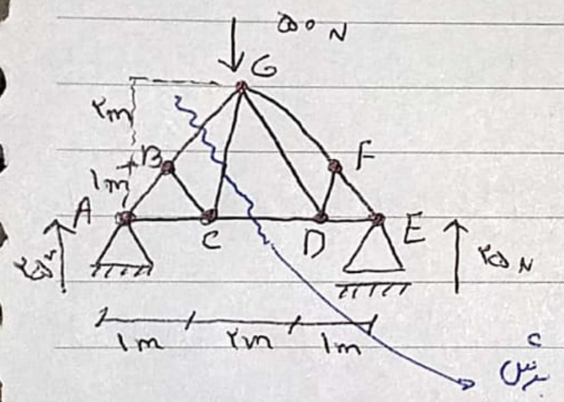
Scanned by CamScanner



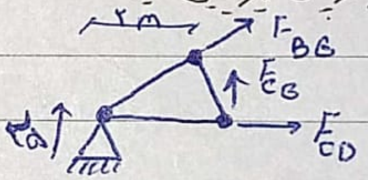
مثال: نیروی عضو F_{FC} از خرپای زیر را تعیین کنید.



عملکرد تکیه‌گاهی ندارد $\rightarrow \Sigma M_H = 0 \rightarrow F_{FC} \times 3 - 100 \times 4 = \Rightarrow F_{FC} = \frac{400}{3}$



مثال: نیروی عضو CD از خرپای زیر تعیین کنید.

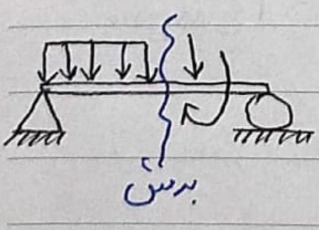


$\Sigma M_G = 0 \rightarrow F_{CD} \times 3 - 25 \times 2 = 0 \rightarrow F_{CD} = \frac{50}{3}$

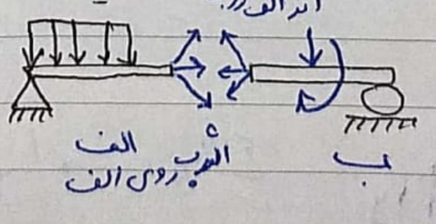
$\rightarrow F_{CD} = 16.6 (N)$ کشش (T)

برای تعیین مقادیر نیروهای داخلی در هر نقطه‌ی تیر باید برش فرضی، تیر را در نقطه‌ی مورد نظر به دو قسمت تقسیم

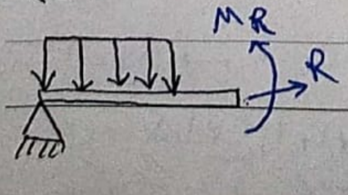
میکنیم و سپس اثر هر قسمت را بر روی قسمت دیگر توسط مجموعه‌ای از نیرو قرار میدهیم. بطور مثال:

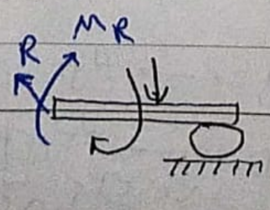


چنانچه هدف تعیین مقدار نیروی داخلی در نقطه‌ی A از تیر زیر باشد.



چنانچه در فصول قبل مشاهده شد مجموعه‌ای از نیرو را میتوان به یک نیروی برایند R و یک کوپل برایند M_R





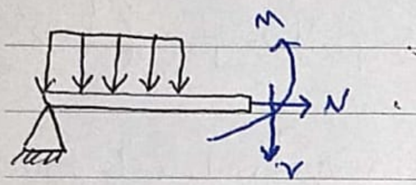
خلاصه نمودن بطوریکه داریم:

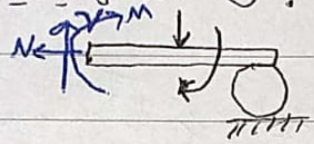
Sahand

Scanned by CamScanner

DATE / / SUBJECT:

نیروی برایند R به دو مؤلفه قابل تجزیه است یکی در امتداد محور تیر (نیروی محوری که آن را با N نمایش میدهند و دیگری عمود بر محور تیر (نیروی برشی که آن را با V نمایش میدهیم و لنگر خمشی نیز تنها شامل یک مؤلفه آن هم عمود بر صفحه ی تیر میباشد که به آن لنگر خمشی میگویند.





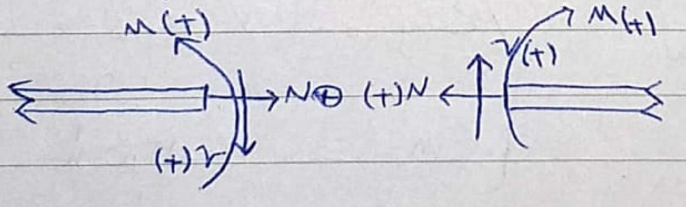
N: نیروی محوری　　M: لنگر خمشی

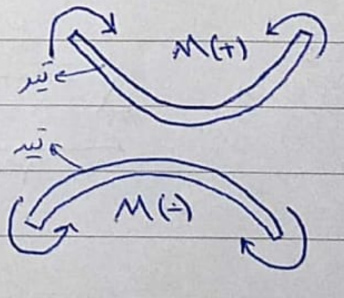
V: نیروی برشی

* قرارداد: نیروی محوری زمانی مثبت است که به صورت کششی باشد. (N)

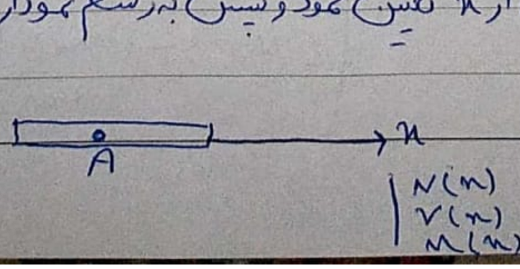
* نیروی برشی زمانی مثبت است که در قطعه ی سمت چپ به سمت پایین و در قطعه سمت راست به سمت بالا باشد.

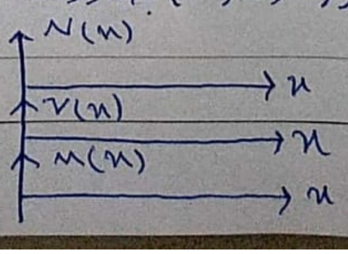
* لنگر خمشی زمانی مثبت است که تیر را به شکل کاسه ای و زمانی منفی است که تیر را به فرم گنبدی در بیاورد.





رسم نمودار: با توجه به اینکه در تیرها برخلاف اعضای خرپایی هم گام با طول تیر نه تنها مقدار نیرو بلکه جهت آن نیز همواره در حال تغییر است. بنابراین برای ثبت این تغییرات نیاز به رسم نمودار نیروهای داخلی میباشد. در این راستا میبایست محوری به نام x را در امتداد طول تیر تعریف کرد و کلیه نیروهای داخلی را (N و V و M) به صورت تابعی از x تعیین نمود و سپس به رسم نمودار بپردازیم.



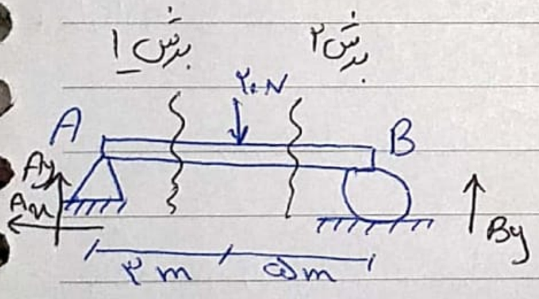


در لنگر متمرکز پرش داریم
در نیرو و برش، پرش داریم

DATE / / SUBJECT:

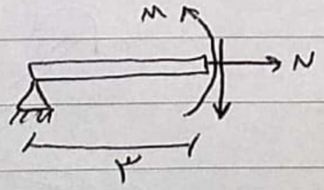
۱- روش مقطع (روش انتگرال گیری): براساس این روش پس از تعیین عکس العمل های تکیه‌گاهی با انتخاب مقاطع مناسبی در طول تیر به تعیین نیروهای داخلی بصورت تابعی از طول تیر پرداخته و در نهایت نمودار آن رسم شود. لازم به ذکر است در تیرهای تحت اثر بار متمرکز بهترین مکان برای مقطع در قبل و بعد از بار میباشد. * در تیرهای تحت بار گسترده قبل (میانه) و بعد از منحنی بارگذاری بهترین نقاط برای مقطع میباشد.

مثال: نمودار نیروهای داخلی را برای تیر زیر رسم کنید.



برای بازه‌ی $0<x<3$

برش ۱ :



$\sum F_x=0 \rightarrow N=0$

$\sum F_y=0 \rightarrow V-12.5=0 \rightarrow V=12.5N$

طول برش ۱

$\sum M_o=0 \rightarrow M-12.5x=0 \rightarrow M=12.5x$

قسمت آخر نمودار

$\sum F_x=0 \rightarrow A_x=0$

$\sum M_A=0 \rightarrow B_y \times 8-20\times 3=0$

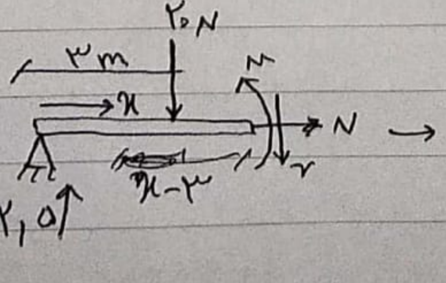
$B_y=7.5$

$\sum F_y=0 \rightarrow A_y+B_y-20=0 \rightarrow A_y=12.5N$

به اندازه A_y بالا میرود.

برای بازه‌ی $3<x<8$

برش ۲ :



$\sum F_x=0 \rightarrow N=0$

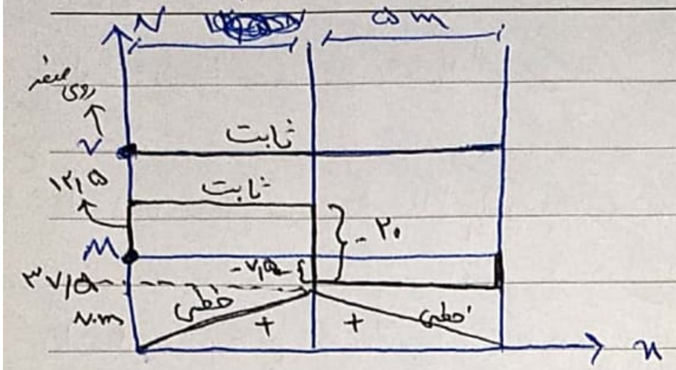
$\sum F_y=0 \rightarrow V+20-12.5=0 \rightarrow V=7.5$

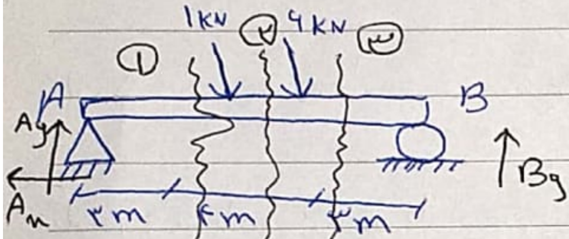
$\sum M_o=0 \rightarrow M+20(x-3)-12.5x=0$

$\rightarrow M=-7.5x+60$

Sahand

Scanned by CamScanner





مثال 8: نمودار نیروهای داخلی تیر زیر را رسم کنید.

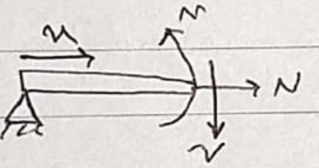
$\sum F_x = 0 \rightarrow A_x = 0$

$\sum M_A = 0 \rightarrow B_y \times 10 - 6 \times 7 - 1 \times 3 = 0$

$B_y = \frac{45}{10} = 4.5\ kN$

$\sum F_y = 0 \rightarrow A_y + B_y - 7 = 0 \rightarrow A_y = 2.5\ kN$

برش ۱: (نگاه از چپ)



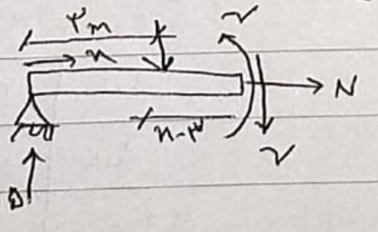
برای بازه $0 < x < 3$

$\sum F_x = 0 \rightarrow N = 0$

$\sum F_y = 0 \rightarrow V = 2.5\ kN$

$\sum M_o = 0 \rightarrow M = 2.5x$

برش ۲: (نگاه از چپ)



برای بازه $3 < x < 7$

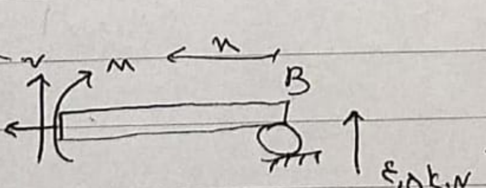
$\sum F_x = 0 \rightarrow N = 0$

$\sum F_y = 0 \rightarrow V + 1 - 2.5 = 0 \rightarrow V = 1.5\ kN$

$\sum M_o = 0 \rightarrow M = 2.5x - 1(x - 3) = 0$

$\rightarrow M = 1.5x + 3$

برش ۳: (نگاه از راست)



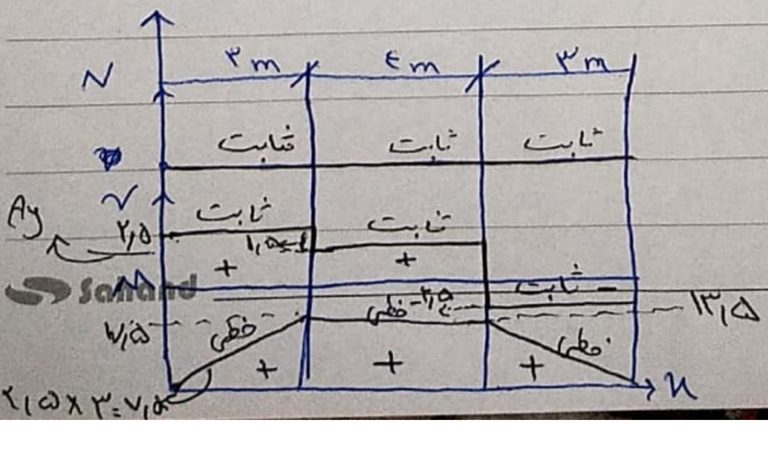
$3 > x > 0$

$\sum F_x = 0 \rightarrow V = 0$

$\sum F_y = 0 \rightarrow V = 4.5$

$\sum M_o = 0 \rightarrow M = 4.5x$

این شیب از نگاه راست مثبت ولی از نگاه ما منفیه



DATE / / SUBJECT:

نکته ۱: در محل نیروی متمرکز دیاگرام برش بصورت پله ای است.

نکته ۲: در محل لنگر متمرکز دیاگرام لنگر بصورت پله ای یا دارای پرش است.

نکته ۴: در تیرهایی تحت اثر بار متمرکز هستند، لنگر خمشی حداکثر در محل بار متمرکز قرار دارد.

نکته ۵: جایی که نمودار نیروی برشی محور x ها را قطع میکند در نمودار لنگر اکستریمم داریم

نکته ۶: مساحت زیر نمودار نیروی برشی بیان لنگر خمشی است یا به عبارت دیگر مشتق معادله لنگر معادله برش را به ما نتیجه میدهد.

نکته ۷: همواره بین بارگذاری برشی و لنگر ارتباط وجود دارد بطوریکه برش یک درجه از بارگذاری بالاتر و پیرو آن لنگر یک درجه از برش بالاتر میباشد.

بارگذاری	برش	لنگر
نقطه‌ای (درجه صفر)	ثابت	خط
ثابت (گسترده، مستطیلی)	خط	درجه ۲
خطی (ذوزنقه و مثلثی)	درجه ۲	درجه ۳

Scanned by CamScanner